

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ЭВМ

Б.П. Рыбакин

*Кафедра Высокпроизводительных вычислений
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1
E-mail: rybakin1@mail.ru*

В работе предложена параллельная разностная схема для решения двух и трехмерных уравнений гравитационной газовой динамики. Нелинейные схемы второго порядка точности с ограничением общей вариации (TVD - Total Variation Diminution) позволяют проводить, с большим разрешением, расчеты ударных волн и предотвращать нефизические осцилляции за их фронтом. Предложенная схема основана на методе предиктор – корректор и является модификацией схемы Nessyahu и Tadmor. Представлены результаты расчетов взаимодействия ударных волн с областями газа пониженной плотности, процесс образования ударных волн и вихрей. Проведенное тестирование показало, что предложенная схема и компьютерная программа позволяет с достаточной точностью решать представляющие практический интерес газодинамические задачи.

NUMERICAL MODELLING OF PROBLEMS OF GAS DYNAMICS ON MULTIPROCESSING COMPUTERS / B.P.Rybakin (Moscow State University, Moscow, Russia). This article is concerned with construct, analyze and implement a non oscillatory high-resolution scheme for multidimensional hyperbolic conservation laws. This approach based on Nessyahu и Tadmor scheme, for solving three–dimensional equations of gravitational gas dynamics. For the solution the parallel algorithm for multiprocessing computers is used.

1 Введение

Создание численных схем высокого разрешения для решения многомерных задач гравитационной газовой динамики дает возможность решать различные астрофизические задачи. Основные современные космологические модели основываются на предположении о существовании во вселенной двух типов вещества - барионного (baryonic matter) и, так называемого темного вещества (dark matter). Если первое вещество мы можем наблюдать непосредственно в виде звезд, газо-пылевых туманностей и т.д., то темное вещество непосредственно невидимо, но именно оно дает основной вклад в гравитационную массу Вселенной. В масштабах галактик доминирующую роль принадлежит движению газопылевых масс, которое описывается уравнениями газовой динамики с учетом сил гравитации [1], [2]. Для достаточно точного описания таких задач необходимо использовать высокоразрешающие разностные схемы. Основной задачей схем высокого разрешения является использование схем как можно более высокого порядка. Кроме того, для подавления осцилляций в областях больших градиентов, необходимо добавлять разумную диссипацию [3].

Решение уравнений проводилось с помощью технологии CUDA (Compute Unified Device Architecture), предложенной NVIDIA. Новая архитектура позволяет использовать графические ускорители для проведения численных расчетов. В архитектуре TESLA используются многопоточковые процессоры SM (Streaming Multiprocessors), которые позволяют использовать новую технологию распараллеливания SIMT (Single Instruction Multiply Thread). Такая технология позволяет создавать, управлять и вычислять несколько десятков тысяч конкурирующих потоков на GPU Tesla C 1060. Потоки организуются в 1d, 2d и 3d потоковые блоки, каждый из которых вычисляется на своем SM. В свою очередь они отображаются на блоки (warps), которые выполняются в потоковых процессорах SP. Потоки выполняются независимо по своим собственным адресам инструкций и регистров. Каждый поток и блок обозначались двумя встроенными переменными: `threadIdx` и `blockIdx`.

CUDA устанавливает иерархию памяти аппаратных средств. Это дает возможность каждой нити получить доступ к необходимым данным. Таким образом, для запуска задания на GPU необходимо:

- выделить память для данных и потоков на GPU;
- скопировать данные в GPU;
- распределить ядра для вычисления;
- скопировать полученные данные обратно в CPU;
- освободить память GPU.

Программирование осуществлялось на языке Фортран PGI (Portland Group Int.) Главная программа запускается на host компьютере (CPU). В свою очередь она организует потоки, потоковые блоки и grid, которые выполняются на GPU [4].

2 Определяющие уравнения

Уравнения движения самогравитирующего газа в консервативном виде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

вместе с уравнением Пуассона:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2)$$

здесь \mathbf{U} вектор консервативных переменных, \mathbf{F}_x , \mathbf{F}_y and \mathbf{F}_z потоки переменных. В уравнении (2) $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, G и ρ обозначают гравитационный потенциал, гравитационную постоянную и плотность соответственно.

В уравнении (1) для идеального газа с самогравитацией \mathbf{U} выражается:

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho \mathbf{v}_x, \rho \mathbf{v}_y, \rho \mathbf{v}_z, \rho \mathbf{E})^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p + \rho g_x \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ \rho E + p + \rho \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

where $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ компоненты скорости, $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)^T = -\nabla \Phi$ представляет гравитационное поле, $E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$ общая энергия, и p давление. Члены \mathbf{F}_y and \mathbf{F}_z получаются аналогично [1]. В качестве уравнения состояния используется уравнение состояния идеального газа с $\gamma = 5/3$.

3 Дискретизация

Многие современные численные схемы высокого разрешения для решения газодинамических задач используют подход, предложенный Годуновым [5]. Этот метод также иногда называют методом конечных объемов. В них, как правило, используют двухшаговый алгоритм типа предиктор-корректор. Решение осуществляется

на однородной кубической сетке с $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ для оси x . В таких схемах используются средние значения $u(x, y, z, t)$ в направлении оси x :

$$\bar{u}(x, t) \equiv \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} u(s, t) ds, \quad I_x \equiv \left\{ s : |s - x| \leq \frac{\Delta x}{2} \right\}$$

так, что интегрирование уравнений (1) в прямоугольнике $I_x \times [t, t + \Delta t]$ дает эквивалентную формулировку.

$$\bar{u}(x, t + \Delta t) = \bar{u}(x, t) - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{I_x}^{t+\Delta x} f(u(x + \frac{\Delta x}{2}, \tau)) d\tau - \int_{I_x}^{t+\Delta x} f(u(x - \frac{\Delta x}{2}, \tau)) d\tau \right]. \quad (5)$$

Другим классом разностных схем являются центральные схемы типа Лакса-Вендроффа. Однако оригинальные разностные схемы типа Лакса-Вендроффа обладают большой схемной вязкостью и, как следствие, плохим разрешением. Nessyahu и Tadmor [6] предложили схему второго порядка точности, в которой они заменили кусочно-постоянную аппроксимацию на линейную интерполяцию. Таким образом, схемы Nessyahu и Tadmor обладают значительно лучшим разрешением, чем противопотоковые схемы и в то же время проще схем, использующие инварианты Римана.

Среднюю величину \bar{w}_j^n можно вычислить в момент времени t^n в ячейке $I_j \equiv \{x : x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}\}$. Для вычисления среднего значения в ячейке $I_{j+1/2} \equiv \{x : x_j \leq x \leq x_{j+1}\}$ на временном слое t^{n+1} необходимо построить кусочно-линейную интерполяционный полином по известным средним значениям \bar{w}_j^n в момент времени t^n .

Линейно-кусочная (piecewise-linear) аппроксимация в одномерном случае может быть представлена в следующем виде:

$$w(x, t^n) = \sum \left[\bar{w}_j^n + w_j' \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) \right] \chi_j(x).$$

Здесь $\chi_p(x)$ - характеристическая функция ячейки, а w_j' ограничитель первого порядка, который построен по средним значениям окружающих ячеек $\{\bar{w}_j^n\}$. Если $\{\bar{w}_j^n, t \geq t^n\}$ является точным решением законов сохранения $w_t + f(w)_x = 0$, то мы имеем центральную разностную схему, в отличие от противопотоковой схемы типа Годунова. Пусть $\bar{w}_{j+1/2}^n(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_{j+1/2}} w(\xi, t) d\xi$ обозначает это смещенное к центру ячейки $x_{j+1/2} = (j + \frac{1}{2})\Delta x$ среднее значение. Тогда интегрирование по контрольному объему дает (аналогично (5)):

$$\bar{w}_{j+1/2}^n(t^{n+1}) = \bar{w}_{j+1/2}^n(t^n) - \lambda \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w_{j+1}(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w_j(\tau)) d\tau \right], \quad (6)$$

здесь $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ обычное ограничение на шаг по времени.

Средние кусочно-линейные величины, построенные в момент времени $t = t^n$, дают: $\bar{w}_{j+1/2}^n(t^{n+1}) = 1/2(w_{j+1}^n + w_j^n) + 1/8(w_j' - w_{j-1}')$. Кроме того, можно показать, что $\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w_j(\tau)) d\tau \sim f(w_j(t^{n+1/2}))$. Шаг предиктор завершается вычислением величин:

$$w_j^{n+1/2} = \bar{w}_j^n - \frac{\lambda}{2} (f(w_j))'. \quad (7)$$

Величины на шаге корректор находятся следующим образом:

$$\bar{w}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{w}_j^n + \bar{w}_{j+1}^n) + \frac{1}{8} (w_j' + w_{j+1}') - \lambda \left[f(w_{j+1}^{n+1/2}) - f(w_j^{n+1/2}) \right]. \quad (8)$$

Здесь w'_j и $f(w_j)'$ обозначают пространственные ограничители (spatial discrete slopes) соответствующих сеточных функций. Более подробно эти ограничители описаны в работах [10], [11]

Для того, чтобы получить не сдвинутую на $1/2$ схему можно переписать кусочно-линейную схему (8):

$$\begin{aligned} \bar{w}_j^{n+1} = & \frac{1}{4}(\bar{w}_{j-1}^n + 2\bar{w}_j^n + \bar{w}_{j+1}^n) - \frac{1}{16}((w_x)_{j+1} - (w_x)_{j-1}) - \\ & \frac{\lambda}{2} \left[f(w_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}) - f(w_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}) \right] - \frac{1}{8}((w_x)_{j+\frac{1}{2}} - (w_x)_{j-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) $(w_x)_j$ и $(w_x)_{j+\frac{1}{2}}$ - дискретные производные по времени на t^n и t^{n+1} шагах по времени. Величина $w_j^{n+\frac{1}{2}}$ определяется на шаге предиктор по (7). Для данной центральной разностной схемы необходимо выполнить условие устойчивости Куранта - Фридрихса - Леви.

В двумерном случае необходимо построить кусочно-линейную аппроксимацию $\bar{w}_{i,j}^n$ для средних величин, отнесенных к центрам ячеек C_{ij} :

$$C_{ij} = \left\{ (\xi, \eta) : |\xi - x_i| \leq \frac{\Delta x}{2}, |\eta - y_j| \leq \frac{\Delta y}{2} \right\}$$

На шаге предиктор необходимо вычислить:

$$w(x, y, t^n) = \sum \left[\bar{w}_{ij}^n + w'_{ij} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) + \dot{w}_{ij} \left(\frac{y - y_j}{\Delta y} \right) \right] \chi_{ij}(x, y) \quad (10)$$

Здесь w'_{ij} и \dot{w}_{ij} ограничители по осям x и y . Далее аналогично (6) - (9).

4 Тестирование схем высокого разрешения в двумерном случае

Для любой разностной схемы очень важной частью ее разработки и апробации является тестирование. В данной работе численный код был протестирован на серии разнообразных тестовых задач, с помощью которых проверялась работоспособность и правильность программы. Эти тесты включают задачу Седова - Тейлора о распространении сферически симметричной ударной волны от точечного взрыва, Причем эта задача была усложнена тем, что изучалось взаимодействие двух сферически симметричных ударных волн распространяющихся от двух источников одинаковой мощности. Такой тест позволяет определить "качество" разностной схемы, наличие или отсутствие осцилляций за фронтом ударных волн и степень крутизны фронта ударной волны. Другой тестовой задачей была выбрана задача взаимодействия ударной волны с газовой полостью, заполненной газом с низкой плотностью [7].

В третьей задаче рассматривалась тестовая задачи из работы [8]. Все задачи исследовались в двумерной постановке.

4.1 Тест Седова - Тейлора

На равных расстояниях от центра на диагонали прямоугольной расчетной области размером 400×400 ячеек были заданы два источника энергии. Шаги по пространству равны $dx=0.05$, $dy=0.05$, параметр $\gamma = 1.4$. Начальные значения плотности и давления во всей области были равны 1.0. Скорости по осям x и y равны 0. Такой тест позволяет оценить качество разностной схемы. Прямоугольные сетки неинвариантны относительно вращения, поэтому получение на них сферически симметричной расходящейся ударной волны является довольно жестким тестом для разностной схемы.

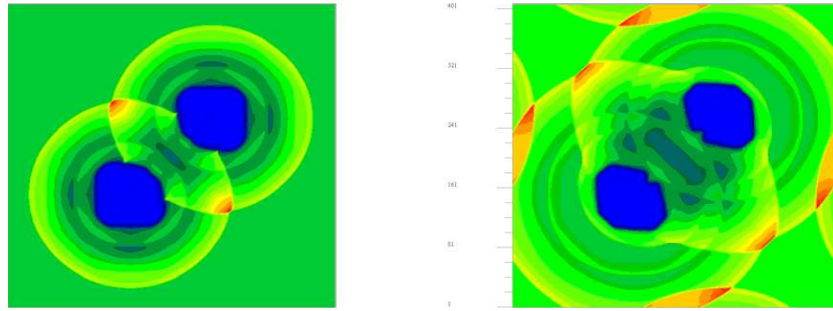


Рис. 1: Sedov-Taylor test for interacting shock waves. At the left figure $t=2.2631$, on the right $t=4.6978$.

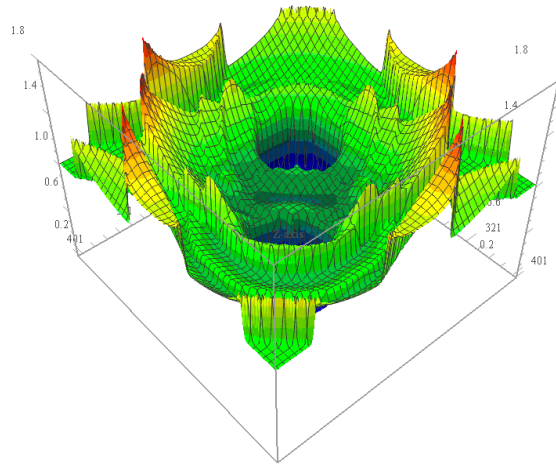


Рис. 2: 3D figures for Sedov-Taylor test. Time $t=4.6978$.

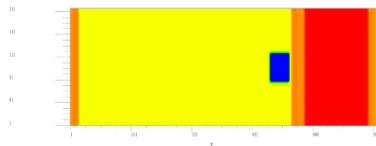


Рис. 3: Interaction the shock waves with gas bubble $t=0.12$.

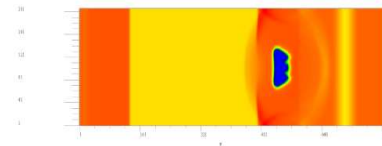


Рис. 4: Interaction the shock waves with gas bubble at time $t=2.335$

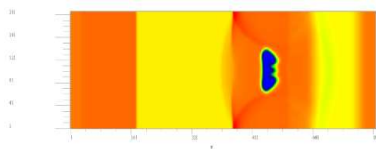


Рис. 5: $t=6.586$.

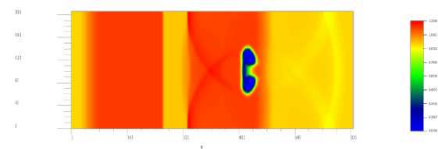


Рис. 6: $t=10.0$.

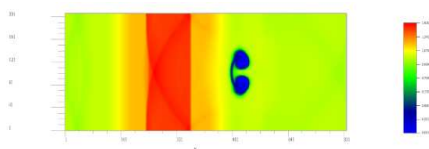


Рис. 7: $t=14.058$.

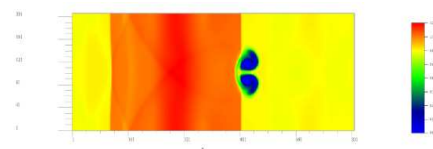


Рис. 8: $t=18.988$.

4.2 Взаимодействие ударной волны с областью газа пониженной плотности

Для тестирования возможности разностной схемы и программы для решения уравнений газовой динамики (1) рассмотрим задачу взаимодействия ударной волны с областью пониженной плотности. Уравнение состояния возьмем в виде:

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right).$$

Область газа пониженной плотности представляет собой прямоугольную область размером 0.25×0.25 , расположенную в точке $(2.5, 0.5)$. В начальный момент времени ударная волна находится при $x = 2.75$. Начальные условия на ударной волне и в расчетной области: $(\rho, u, v, p)^T = (4/3, 0, 0, 3/2)^T$ внутри области низкой плотности давление и плотности равны: $p = 1$ и $\rho = 1/29$, слева от ударной волны они удовлетворяют условиям Ренкина - Гюгонно [9]. Задача решается на прямоугольной сетке. На Рис. 3 - Рис.8 приведено распределение плотности в различные моменты времени. Приведенные результаты показывают устойчивость и качество данной схемы.

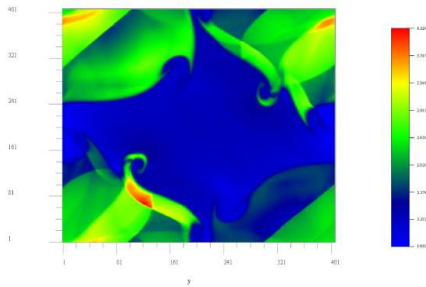


Рис. 9: Тестовая задача в Pd постановке, $t=0.4564$.

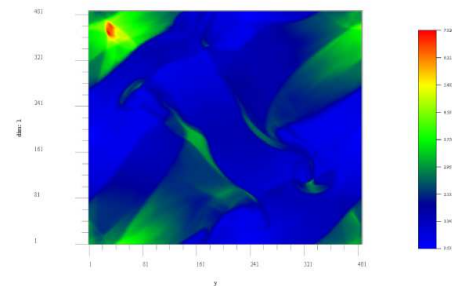


Рис. 10: Тестовая задача в Pd постановке, $t=0.90947$.

4.3 Распад произвольного разрыва в ударной трубе в двумерной постановке

Рассмотрим численное решение двумерных уравнений газовой динамики для задачи о распаде разрывов (уравнение (1)) в ударной трубе [8], [11].

Начальные условия. Расчетная область представляет собой квадрат $R:0:1 \times 0:1$, разделенный на четыре квадранта линиями $x = 1/2, y = 1/2$. Шаг по $x - dx=0.0025$, шаг по $y - dy=0.0025$, $\gamma = 1.4$, количество ячеек по осям $x - nx=400$ и $y - ny=400$ соответственно. Обозначим полученные квадранты так [8]: левую нижнюю - 1.1, правую нижнюю - 1.2, левую верхнюю - 2.1, правую верхнюю - 2.2. Задача Римана определяется начальными состояниями в каждом квадранте. Начальные состояния - плотность, скорости и давление задается так: в области 1.1 -

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.75 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В области 1.2 -

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В области 2.1 -

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.75 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В области 2.2 -

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -0.75 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

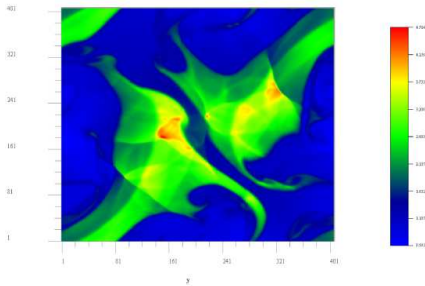


Рис. 11: $t=1.3686$.

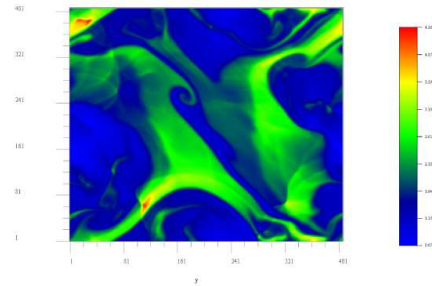


Рис. 12: $t=1.9106$.

Здесь ρ - плотность, u и v - компоненты вектора скорости

$$E = \rho e + 1/2\rho(u^2 + v^2)$$

- общая энергия на единицу объема и e - внутренняя энергия газа. Для решения системы уравнений используется уравнение состояния совершенного газа $p = \rho e(\gamma - 1)$.

На рис. (9) - (12) приведены графики распределения давления на различные моменты времени. Число Куранта - Фридрихса - Леви для приведенных расчетов равно CFL=0.45. Полученные результаты хорошо совпадают с данными, полученными в [8]. Можно отметить, что за фронтами ударных волн нет осцилляций и сами фронты достаточно крутые. Фронты контактных разрывов также выражены достаточно резко.

4.4 Заключение

В работе представлена разностная схема для решения многомерных уравнений газовой динамики. Проведенное тестирование показало, что эта схема и программа позволяют решать различные задачи, описываемые законами сохранения. Были протестированы различные задачи - о взаимодействии сильных ударных волн в задаче о точечном взрыве Седова - Тейлора, образование вихрей, при падении ударной волны на область газа с низкой плотностью и задача о распаде произвольного разрыва в двумерной ударной трубе с различными состояниями газов. Таким образом, данную схему и программу можно использовать для решения задач астрофизики, которые описываются уравнениями гравитационной газовой динамики.

Список литературы

- [1] T. Matsumoto. Self-gravitational Magnetohydrodynamics with Adaptive Mesh Refinement for Protostellar Collapse. *Publ. Astron. Soc. Japan* **59**, 2007, October 25
- [2] C. Gheller, O. Pantano, L. Moscardini. A cosmological hydrodynamic code based on the Piecewise Parabolic Method. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 5 October 2006.
- [3] G.-S. Jiang, D. Levy, C.-T. Lin, S. Osher, E. Tadmor. High-Resolution Nonoscillatory Central Schemes With Nonstaggered Grids For Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM J. NUMER. ANAL.* Vol. 35, No. 6, pp. 2147-2168, December 1998
- [4] Б.П. Рыбакин, Н.И. Шидер. Построение параллельных алгоритмов для решения задач гравитационной газовой динамики. Труды Международной суперкомпьютерной конференции Научный сервис в сети ИНТЕРНЕТ: суперкомпьютерные центры и задачи, Изд-во Издательство Московского университета, 2010 г., стр.281-284
- [5] С. К. Годунов, «Разностный метод расчета ударных волн», УМН, 12:1(73) (1957), 176—177
- [6] H. Nessyahu, E. Tadmor Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.*, 87 (1990), pp.408-448.
- [7] J. Balbras, Xin Qian. Non-oscillatory Central Schemes for 3D Hyperbolic Conservation Laws. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics.*
- [8] D.Levy, G.Puppo, G.Russo. A Fourty-Order Weno Scheme for Multidimensional Hyperbolic System of Conservation Laws. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 33, No 3, 1999, p. 547-571
- [9] A. Kurganov, Chi-Tien Lin. On the Reduction of Numerical Dissipation in Central-Upwind Schemes. *COMMUNICATIONS IN COMPUTATIONAL PHYSICS*. Vol. 2, No. 1, pp. 141-163.
- [10] G. Toth, D. Odstrcil. Comparision of Some Flux Corrected Transport and Total Variation Diminishing Numerical Schemes for Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Problems. *Journal of Comp. Phys.* 128, pp. 82-100, (1996)
- [11] R. Liska, B. Wendroff. Comparison of Several Difference Schemes on 1d and 2d Test Problems for the Euler Equations. *SIAM J. SCI. COMPUT.* Vol. 25, No. 3, pp. 995–1017
- [12] I. Kulikov, G. Lazareva, A. Snytnikov, V. Vshivkov. Supercomputer Simulation of an Astrophysical Object Collapse by the Fluids-in-Cell Method. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. V. Malyshkin (Ed.): *PaCT 2009, LNCS 5698*, pp. 414–422, 2009.

