

МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ НА БАЗЕ ГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССОРА

А. В. Цепаев

Институт Механики и Машиностроения КазНЦ РАН

Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31

E-mail: tsepaev@mail.knc.ru

Численные алгоритмы с декомпозицией применены для решения трехмерной задачи двухфазной фильтрации жидкости на графических вычислительных системах. Показана их эффективность, возрастающая с увеличением числа сгущающихся участков сетки. В основу численной аппроксимации задачи положен метод контрольных объемов.

METHODS OF DECOMPOSITION FOR SOLVING TWO-PHASE FLOW PROBLEM ON GRAPHIC PROCESSOR / A.V. Tsepaev

(Russian Academy of Sciences Kazan Science Center Institute Of Mechanics And Engineering, Lobachevsky str. 2/31, Kazan, 420111, Russia). The numerical algorithms with decomposition are applied to the solution of a three-dimensional two-phase flow problem on GPU. Their algorithms show their efficiently with increasing number of fine grid segments. The numerical approximation of this problem is based on the control volumes method.

1. Введение

Параллельные вычисления на сегодняшний день являются одной из наиболее актуальных и приоритетных тем для исследования [1]. Таким пристальным вниманием параллельные вычисления обязаны стремительным ростом объемов данных, нуждающихся в обработке. Спектр исследуемых задач крайне широк. К таким задачам относятся трехмерные задачи математической физики в областях сложной геометрии. При их численном решении сеточными методами возникают системы уравнений большой размерности. Эти задачи могут быть решены за приемлемое время лишь, будучи запущены на суперкомпьютере, обладающим производительностью в сотни терафлопов. Суперкомпьютеры неплохо освоены, для них написано множество прикладных пакетов. Однако из-за высокой стоимости таких систем необходимо искать альтернативу. В настоящий момент большая часть персональных компьютеров оснащается отдельными видеокартами. Именно графические вычислительные системы могут стать решением проблемы обработки трудоемких вычислительных задач [2] - [4]. Одним из достоинств графических процессоров является то, что он показывает хорошие результаты в параллельной обработке данных, с одной и той же последовательностью действий, применяемых к большому объему данных.

При решении задач двухфазной фильтрации [5] - [6] на каждом временном шаге приходится определять поля давления и насыщенности. Для решения сеточных систем уравнений по давлению и насыщенности использовались два различных метода декомпозиции области: один метод для решения сеточных уравнений по давлению, другой - для решения сеточных уравнений по насыщенности [7]. Метод декомпозиции области по давлению основан на независимом решении систем алгебраических уравнений для сгущающихся участков сетки в подобластях и новом типе согласования этих решений с решением на грубой сетке. Новый тип согласования заключается в представлении решения в

подобластях сгущения сетки в виде суммы двух решений. Первое решение на исходной сетке, второе решение на введенной дополнительной грубой сетке. Алгоритм построен таким образом, что при итерационном процессе значения решений на дополнительных грубых сетках стремятся к нулю, и решение полученной системы сходится к решению исходной системы алгебраических уравнений. Для решения уравнения по насыщенности разработан новый метод декомпозиции области, основанный на сочетании элементов явной и неявной схем. Декомпозиция явных схем не представляет трудностей, но при наличии размерности ячеек, соизмеримой с диаметром скважин, требуется маленький шаг по времени, что приводит к большим вычислительным затратам. Декомпозиция неявных схем требует использования предиктор-корректор процедуры. В предлагаемом методе на каждом временном шаге сеточные уравнения по насыщенности для сгущающихся участков решаются независимо по неявной схеме. Согласование полученных решений с решением на грубой сетке достигается за счет сочетания элементов явной и неявной схем в определении насыщенности для ячеек, окружающих сгущающиеся участки, без использования предиктор-корректор процедуры.

На основе предложенных методов декомпозиции построены алгоритмы для решения задачи на графических вычислительных системах. Показана эффективность построенных алгоритмов с декомпозицией области в сравнении с алгоритмами без декомпозиции.

2. Постановка задачи двухфазной фильтрации.

Область решения представляется многосвязной областью, внутренние поверхности которой определяются интервалами вскрытия скважин. Интервалы вскрытия скважин являются особенностями задачи, требующими сгущения сетки. Задача решается в области D , представляющей собой пласт, ограниченный кровлей, подошвой, боковыми поверхностями и поверхностями интервалов вскрытия скважин V_k , $k = 1, \dots, N$. Объединение $\bigcup_{k=1}^N V_k$ является дополнением многосвязной области D до односвязной области. Система уравнений двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости без учета капиллярных и гравитационных сил записывается в виде

$$\operatorname{div}((K_o + K_w)\operatorname{grad} p) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}_w) + m\partial S_w / \partial t = 0, \quad (2)$$

при граничных условиях

$$p = p_\Gamma \text{ на } \Gamma_1, \quad (3)$$

$$-(K_o + K_w)\partial p / \partial n = q_{\Gamma_2} \text{ на } \Gamma_2, \quad (4)$$

$$p|_{\partial V_k} = P_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (5)$$

$$S_w = S_{w_\Gamma} \text{ на } \Gamma_3, \quad (6)$$

и начальном условии

$$S_w = S_w^0 \text{ в } D, \quad (7)$$

где $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ - внешняя граничная поверхность области D , Γ_3 - часть поверхности Γ , через которую жидкость поступает в пласт, ∂V_k - поверхность интервала вскрытия k -ой скважины, P_k - заданное давление на k -ой скважине, N - число скважин. Пласт покрыт сеткой Ω , ячейки которой в прискважинных зонах D_k уменьшаются в размерах к интервалам вскрытия скважин по убывающей геометрической прогрессии.

3. Алгоритмы решения задачи с декомпозицией области.

Решение задачи по определению поля давления p и насыщенности S_w на $(n+1)$ -ом временном шаге включает следующие этапы.

1) Вычисляются давления p_i^{n+1} из системы (1),(3)-(5) со значениями K_{oi}^n , K_{wi}^n . Предлагается метод декомпозиции области. Для этого вводятся дополнительные грубые сетки ω_k , покрывающие области $D_k \cup V_k$ и имеющие размер ячеек, эквивалентный размеру ячеек Ω в D_0 . Решение p в области D_0 представляется как p_1 с граничными условиями $p_1 = p_{1\gamma_k}$ на границах раздела γ_k области D_0 и прикважинных подобластей D_k , а вне области D_0 как сумму двух решений p_{2k} и p_{3k} . Решения p_{2k} определяются на сетке Ω в областях D_k , а решения p_{3k} на сетках ω_k в областях $D_k \cup V_k$, при этом $p_{1\gamma_k} = p_{2\gamma_k} + p_{3\gamma_k}$ на границах γ_k .

Постановка задачи для определения p_1 на сетке Ω :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(K_w + K_o) \operatorname{grad} p_1 &= 0 \text{ в } D_0, \\ p_1 &= p_\Gamma \text{ на } \Gamma_1 \cap D_0, \\ -(K_w + K_o) \partial p_1 / \partial n &= q_n \text{ на } \Gamma_2 \cap D_0, \\ p_1 &= p_{1\gamma_k} \text{ на } \gamma_k, k = 1 \dots N. \end{aligned} \quad (8)$$

Постановка задачи для определения p_{2k} ($k = 1, \dots, N$) на сетке Ω :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(K_w + K_o) \operatorname{grad} p_{2k} &= 0 \text{ в } D_k, \\ p_{2k} &= p_\Gamma \text{ на } \Gamma_1 \cap D_k, \\ -(K_w + K_o + K_g) \partial p_{2k} / \partial n &= q_n \text{ на } \Gamma_2 \cap D_k, \\ p_{2k} / \partial V_k &= P_k, \\ p_{2k} &= p_{2\gamma_k} \text{ на } \gamma_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Постановка задачи для определения p_{3k} ($k = 1, \dots, N$) на сетке ω_k :

$$\begin{aligned} (mS_g(\rho_g)'_p / \rho_g) \partial p_{3k} / \partial t - \operatorname{div}(K_w + K_o + K_g) \operatorname{grad} p_{3k} &= 0 \text{ в } D_k \cup V_k, \\ p_{3k} &= 0 \text{ на } \Gamma_1 \cap (D_k \cup V_k), \\ (K_w + K_o + K_g) \partial p_{3k} / \partial n &= 0 \text{ на } \Gamma_2 \cap (D_k \cup V_k), \\ p_{3k} &= p_{3\gamma_k} \text{ на } \gamma_k. \end{aligned} \quad (10)$$

Решения p_1 , p_{2k} и p_{3k} при известных граничных значениях $p_{\Gamma_{1k}}$, $p_{\Gamma_{2k}}$, $p_{\Gamma_{3k}}$ независимо определяются из систем уравнений (8), (9) и (10) соответственно. При выполнении условий на границах раздела γ_k относительно давлений $p_{\Gamma_{1k}} = p_{\Gamma_{2k}} + p_{\Gamma_{3k}}$ и относительно нормальных составляющих скоростей фильтрации $q_{1kn} + q_{2kn} + q_{3kn} = 0$ для определения решений p_1 , p_{2k} , p_{3k} достаточно задания начальных условий и граничных значений $p_{\Gamma_{3k}}$. При значениях $p_{\Gamma_{3k}} = 0$ система уравнений (8)-(10) эквивалентна исходной системе уравнений (1), (3) - (5). Таким образом, для получения решения исходной системы уравнений необходимо построить алгоритм решения системы (8)-(10), в котором $p_{3k} \rightarrow 0$.

На каждой итерации $i \geq 1$ независимо определяются p_{2k}^i из решения задач (9) с граничными значениями на γ_k

$$p_{2\gamma_k}^i = p_{2\gamma_k}^{i-1} + p_{3\gamma_k}^{i-1}, \quad (11)$$

где $p_{2\gamma_k}^0$, $p_{3\gamma_k}^0$ берутся с предыдущего временного шага. Для определения p_1^i и p_{3k}^i совместно решаются системы уравнений (8), (10) на грубой сетке с дополнительными условиями $p_{\Gamma_{1k}}^i - p_{\Gamma_{3k}}^i = p_{\Gamma_{2k}}^i$ и $q_{1kn}^i + q_{3kn}^i = -q_{2kn}^i$ на γ_k при фиксированных узловых значениях решений p_{2k}^i . В вычислительном процессе, построенном таким образом, граничные значения

p_{3jk}^i сносятся после каждой итерации по правилу (11) на граничные значения p_{2jk}^i . В результате p_{3k}^i с ростом i стремятся к нулю, и i -ое приближение давления определяется решением p_i^i в области D_0 и решениями p_{2k}^i в подобластях D_k .

2) Вычисляются полные расходы жидкости, выходящие из ячеек грубой сетки в единицу времени

$$Q_{j,i}^{n+1} = (p_j^{n+1} - p_i^{n+1}) / R_{i,j}^n \quad (12)$$

где $R_{i,j}^n = A_{i,j} / (K_{wi}^n + K_{oi}^n) + A_{j,i} / (K_{wj}^n + K_{oj}^n)$; $A_{i,j}$ - коэффициенты, учитывающие сопротивление потоку жидкости между i -ой и j -ой ячейками за счет i -ой ячейки; p_i^{n+1} - давление в i -ой ячейке. Формулы для вычисления коэффициентов $A_{i,j}$ записываются в виде:

$A_{i,j} = L_{i,j} / D_{i,j}$, где $D_{i,j}$ - площадь общей граничной поверхности i -ой и j -ой ячеек, $L_{i,j}$ - расстояние от узлового значения i -ой ячейки до общей граничной поверхности.

3) Для полных расходов, выходящих из ячеек грубой сетки, вычисляются фазовые расходы по явной схеме

$$Q_{wj,i}^{n+1,\alpha} = (K_w^n / (K_w^n + K_o^n))_{j,i}^{up} Q_{j,i}^{n+1},$$

$$\text{где } (K_w^n / (K_w^n + K_o^n))_{j,i}^{up} = \begin{cases} (K_{wi}^n / (K_{wi}^n + K_{oi}^n)), & p_i \geq p_j \\ (K_{wj}^n / (K_{wj}^n + K_{oj}^n)), & p_i < p_j \end{cases}.$$

4) Для каждой прискважинной зоны независимо вычисляются насыщенности по неявной схеме из системы уравнений

$$m_i V_i (S_{wi}^{n+1} - S_{wi}^n) / \Delta t = \sum_j Q_{wj,i}^{n+1}, \quad (13)$$

где сумма берется по j -ым ячейкам, окружающим i -ую ячейку, $Q_{wj,i}^{n+1} = Q_{wj,i}^{n+1,\alpha}$ для j -ых ячеек грубой сетки, из которых расход поступает в прискважинную зону, $Q_{wj,i}^{n+1} = Q_{wj,i}^{n+1,\beta} = (K_w^{n+1} / (K_w^{n+1} + K_o^{n+1}))_{j,i}^{up} Q_{j,i}^{n+1}$ в остальных случаях. Фазовые расходы $Q_{wj,i}^{n+1,\alpha}$ являются граничными условиями при решении системы (13).

5) Вычисляются насыщенности для ячеек грубой сетки $S_{wi}^{n+1} = S_{wi}^n + (\Delta t / m_i V_i) \sum_j Q_{wj,i}^{n+1}$ где

значения $Q_{wj,i}^{n+1} = Q_{wj,i}^{n+1,\alpha}$ берутся из решения системы уравнений (13) для j -ых ячеек прискважинных зон, из которых расход поступает в ячейки грубой сетки, $Q_{wj,i}^{n+1} = Q_{wj,i}^{n+1,\beta}$ в остальных случаях.

4. Численные эксперименты.

Предложенный алгоритм тестировался при решении модельной трехмерной задачи двухфазной фильтрации жидкости с различным числом вертикальных добывающих скважин. Рассматривался десятислойный пласт ($\approx 10\text{км} \times 10\text{км} \times 0.18\text{км}$) с толщинами слоев $d_1 = 1$ м, $d_2 = 1$ м, $d_3 = 3$ м, $d_4 = 1$ м, $d_5 = 1$ м, $d_6 = 1$ м, $d_7 = 2$ м, $d_8 = 1$ м, $d_9 = 2$ м, $d_{10} = 5$ м и абсолютными проницаемостями $k_1 = 10^{-3}$ дарси, $k_2 = 10^{-2}$ дарси, $k_3 = 25 \times 10^{-3}$ дарси, $k_4 = 10^{-2}$ дарси, $k_5 = 10^{-3}$ дарси, $k_6 = 10^{-2}$ дарси, $k_7 = 5 \times 10^{-2}$ дарси, $k_8 = 10^{-2}$ дарси, $k_9 = 10^{-3}$ дарси, $k_{10} = 15 \times 10^{-3}$ дарси соответственно. Кровля пласта считалась непроницаемой, на боковых поверхностях и подошве пласта давление $P_T = 125$ атм, на скважинах $P_K = 30$ атм, на боковой поверхности насыщенность $S_w = 0$, на подошве $S_w = 1$. Начальная насыщенность $S_w = 0$. Динамическая вязкость воды - $\mu_w = 1 \text{мПа} \cdot \text{с}$, динамическая вязкость нефти - $\mu_o = 15 \text{мПа} \cdot \text{с}$, плотность нефти $\rho_o = 0.882 \text{г/см}^3$, плотность воды $\rho_w = 1 \text{г/см}^3$. Относительные фазовые проницаемости брались линейными функциями от насыщенностей. Каждый интервал

вскрытия моделировался круговым цилиндром с радиусом основания $r = 0.1$ м и замыкался сверху и снизу сферическими поверхностями радиуса $r = 0.1$ м. Таким образом, для каждой точки поверхности интервалов вскрытия вектор нормали определен однозначно. Ячейки, примыкающие к скважинам, имели размеры как в горизонтальной плоскости, так и по высоте, порядка 0.1 м.

Системы уравнений для давления решались методом сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей, для построения которой использовалось неполное разложение Холесского. Системы уравнений для насыщенности решались методом Зейделя. Системы уравнений решались до точности по максимальной невязке $\varepsilon = 10^{-1}$. Решение задач прерывалось по времени при достижении обводненности на скважинах $S_w = 0.98$.

Все системы уравнений решались на графическом процессоре компании NVIDIA GTS 250 с 1 Г оперативной памяти и 128 вычислительных ядер. Использовалась стандартная библиотека для решения систем линейных алгебраических уравнений на графических вычислительных устройствах. В силу того, что данный графический процессор не поддерживает вычисления с двойной точностью, все вычисления проводились с одинарной точностью. Для реализации алгоритмов использовалась технология CUDA.

На рис. 1 - 3 приведено расчетное время решения задачи на CPU и GPU с различным числом сгущающихся участков.

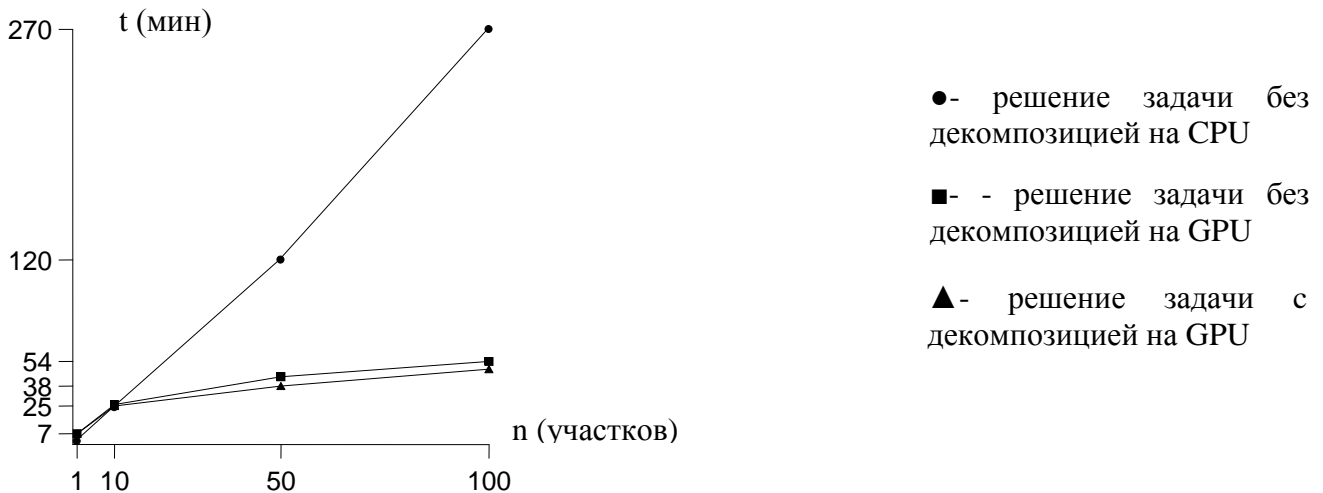


Рис. 1. Время решения задачи с декомпозицией области по давлению.

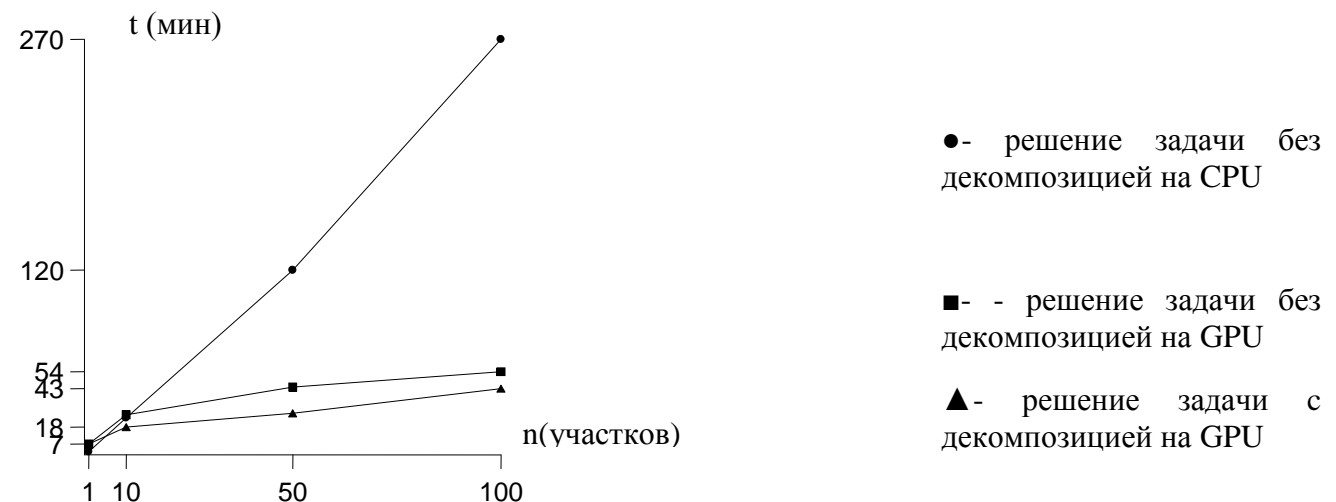


Рис. 2. Время решения задачи с декомпозицией области по насыщенности.

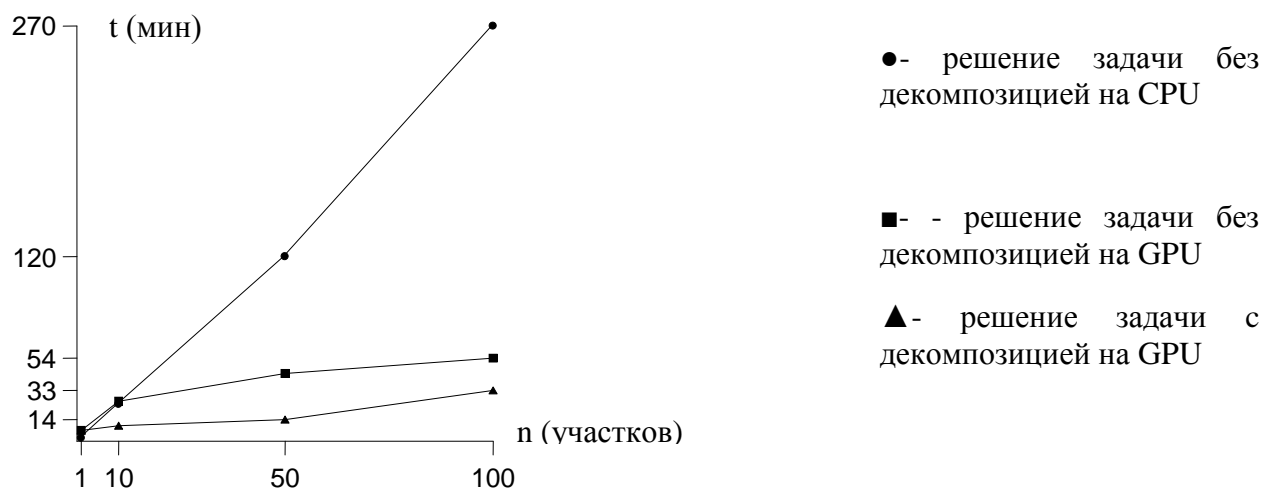


Рис. 3. Время решения задачи с декомпозицией области по давлению и насыщенности.

Из приведенных графиков видна эффективность предложенных алгоритмов при решении задач на GPU с большим числом сгущающихся участков сетки по сравнению с алгоритмом без декомпозиции области.

5. Выводы.

Построены алгоритмы для решения задачи двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками, основанный на методах декомпозиции области. Декомпозиция сеточной системы уравнений по давлению основана на согласовании решений для сгущающихся участков с решением на грубой сетке за счет введения дополнительных грубых сеток. Декомпозиция сеточной системы уравнений по насыщенности основана на независимом решении уравнений на сгущающихся участках по неявным схемам и на согласовании этих решений с решением на грубой сетке с использованием элементов явной и неявной схем. На основе предложенных методов декомпозиции построены алгоритмы для решения задачи на графических вычислительных системах. Показана эффективность построенных алгоритмов с декомпозицией области в сравнении с алгоритмами без декомпозиции.

6. Список литературы.

1. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления.- СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608с.
2. Accelerator: Using Data Parallelism to Program GPUs for General-Purpose Uses / Tarditi D., Puri S., Oglesby J – Microsoft Research, 2006 – 11 с.
3. GPGPU: General Purpose Computation On Graphics Hardware / Luebke D., Harris M., Kruger J., и др. – SIGGRAPH, 2005. – 277 с.
4. GPGPU::Basic Math Tutorial // Dominik Goddeke -- GPGPU [Электронный ресурс] / Dominik Goddeke 2005-2006. - режим доступа: <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~goeddeke/gpgpu/tutorial.html>, свободный.
5. Азис Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азис, Э. Сеттари. - М.: Недра, 1982, - 407 с.
6. Басниев К.С. Подземная гидравлика / К.С. Басниев, А.М. Власов, И.М. Кочина, В.М. Максимов. – М.: Недра, 1986, - 303 с.
7. Мазуров П.А. Алгоритмы для распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками / П.А. Мазуров, А.В. Цепяев // Вычислительные методы и программирование. - 2006. - Т.7. - №2. - С. 115–123.