

МАСШТАБИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ НА ОСНОВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А.А. Макаренко, Л.С. Турнецкий
ОАО «Научно-производственное предприятие «Радар ММС»
Россия, 197375, Санкт-Петербург, ул. Новосельковская, 37
E-mail: a_makarenko@mail.ru, tls@mail.spbnit.ru

В докладе представлены результаты разработки методов локальной двухмерной интерполяции телевизионного изображения в реальном масштабе времени сплайнами 3-й и 5-й степени.

REAL TIME IMAGE SCALING BASED ON THE PARALLEL CALCULATIONS / A.A Makarenko, L.S. Tournetsky (“Radar mms” JSC, 37, Novoselkovskaya, Saint-Petersburg 197375, Russia). In the report it is presented developed methods of the local TV image 2-D interpolation in real time by the splines.

Преобразование масштаба всего дискретизированного исходного изображения или его фрагмента, выполняемое в реальном масштабе времени при решении задач коррекции результатов телевизионной аэросъемки, производимой бортовой аппаратурой беспилотного летательного аппарата, производится на основе изменения количества элементов, приходящееся на обрабатываемую зону изображения, и размещение их во времени и в пространстве в соответствии с первоначальной частотой дискретизации. При этом происходит увеличение или уменьшение размеров этого изображения в зависимости от того, увеличивается или уменьшается количество его элементов. Поэтому процесс изменения количества элементов, составляющих обрабатываемое изображение, может быть рассмотрен как процедура вторичной дискретизации этого изображения. Как известно, вторичная дискретизация – это преобразование первичного дискретного колебания во вторичное дискретное колебание с использованием промежуточного сглаживания интерполяцией [1]. Сущность проблемы интерполяции состоит в отыскании яркости изображения в некоторых промежуточных точках между известными его элементами с целью сохранения, а иногда и улучшения качества исходного изображения при осуществлении преобразований.

Исследование процедур изменения масштаба дискретизированных изображений, выполненное на основе применения специальных тестовых сюжетов, выявило непригодность для решения задач коррекции результатов телевизионной аэросъемки большинства применяемых алгоритмов интерполяции подобных изображений в реальном масштабе времени. Следовательно, определение алгоритма интерполяции дискретизированного изображения является актуальной задачей.

Задача интерполяции при обработке телевизионного изображения, представленного в виде двумерного числового массива, в одномерном разделимом варианте уже решалась. Однако чаще всего решения имеют частный характер, ориентированы на конкретную узкую задачу и обычно не пригодны для других аналогичных.

Кроме того, обработка изображения по разделимым алгоритмам чаще всего не обеспечивает такого быстродействия, которое требуется для обеспечения высококачественного преобразования полноформатного телевизионного изображения высокой четкости, формируемого современной бортовой телевизионной аппаратурой беспилотного летательного аппарата, или составляющих изображения формата 3D. Поэтому, используя накопленный ранее опыт [2,3], сделаем попытку

отыскать такое решение задачи интерполяции, которое могло бы использоваться во многих случаях современной цифровой обработки изображений.

Учитывая, что пространственное расположение элементов телевизионного изображения после его дискретизации в подавляющем большинстве случаев имеют прямоугольную структуру, процедуру двумерной интерполяции будем строить путем разработки одномерных процедур в горизонтальном и вертикальном направлениях с последующим объединением их в двумерную.

Итак, имеется двумерная дискретная функция (рис.1)

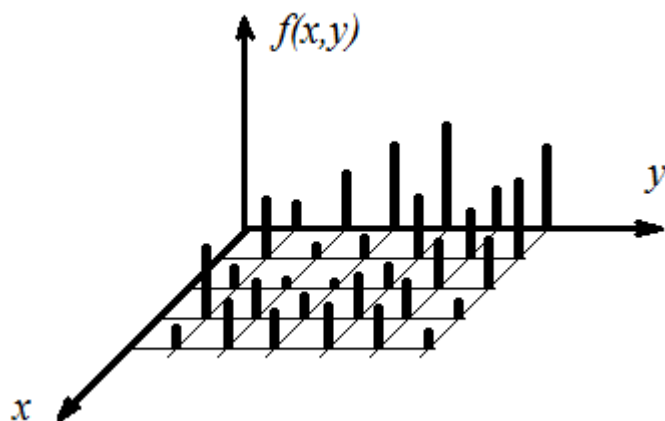


Рис.1. Двумерная дискретная функция $f(x, y)$ (отсчеты исходного изображения)

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m f(k, l) \delta(x - k; y - l), \quad (1)$$

где

$$\delta(x - k; y - l) = \begin{cases} 0, & x \neq k, y \neq l, \\ 1, & x = k, y = l, \end{cases}$$

представляющая собой совокупность значений яркости в отсчетах исходного дискретизированного изображения размером $m * n$. В общем случае $m \neq n$.

Требуется по известным величинам $f(x, y)$ ($x \in [0, n-1]$, $y \in [0, m-1]$) в точках исходного изображения восстановить значения яркости $f(x, y)$ этого изображения, расположенные между данными точками, при условии обеспечения минимума абсолютного значения ошибки восстановления.

Проанализируем интерполяцию изображения только в горизонтальном направлении вдоль оси x (рис.1), результаты данного анализа распространим на вертикальное направление вдоль оси y и на основе полученных результатов построим алгоритм двумерной интерполяции.

Простейшие виды интерполяции (повторение отсчетов и кусочно-линейная аппроксимация, применяемые для обеспечения высокой скорости обработки) являются очень грубым приближением интерполируемой функции и не обеспечивают хорошего качества обработанного изображения.

Точность восстановления значений яркости $f(x)$ исходного изображения, находящихся между выбранными его отсчетами, можно значительно повысить, увеличив порядок интерполирующей линии, т. е. если вместо функции нулевой или первой степени применить описывающий интерполирующую линию полином степени n

$$F(x) = \sum_{q=0}^n \alpha_q x^q,$$

удовлетворяющий условию интерполяции:

$$F(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Такой метод интерполяции называется полиномиальным [4].

Нелокальная интерполяция изображений различными полиномами является нелокальной процедурой, требующей для своей реализации значительного количества аппаратуры или достаточно сложной программы, поэтому такой вид интерполяции не пригоден при быстрой обработке изображений.

Главный путь преодоления данного недостатка следующий: исходный интервал $[x_0, x_{n-1}]$ (например, одна телевизионная строка) разделяется на N подынтервалов, включающих в себя по два, три или четыре отсчета, и в каждом подынтервале, где необходимо восстановить промежуточные значения $f(x)$, строится интерполяционный полином, т. е. процедура интерполяции становится локальной. Известно, что такая интерполяция называется сплайн-интерполяцией, а кусочно-полиномиальная интерполирующая функция с однородной структурой (составленная из полиномов одной и той же степени) – сплайн-функцией или сплайном [4,5].

Таким образом, вычисление значений $f(x)$ интерполируемой функции (1) следует вести методом сплайн-интерполяции при условии обеспечения непрерывности самой интерполирующей функции и нескольких ее производных, количество которых определим ниже.

Остановимся на рассмотрении только наиболее распространенных сплайнов нечетной степени. Заметим, что интерполяция кубическими сплайнами дефекта¹ три, не обеспечивающая непрерывности даже первой производной, совпадает с интерполяцией кусочными полиномами Лагранжа третьей степени, которая не дает высокого качества интерполированного изображения из-за изломов интерполирующей функции.

Интерполяция функции (1) кубическим сплайном дефекта один обеспечивает высокое качество обработанного изображения [5], но интерполяционный процесс и здесь оказывается нелокальной процедурой. Этот же вывод относится и к случаю представления интерполяционного кубического сплайна дефекта один через В-сплайны [4,5].

Различные варианты локального построения интерполяционного кубического сплайна дефекта один [4,6] обычно сопряжены с большими погрешностями из-за накопления ошибок округления в процессе расчета сплайна.

Другим способом локализации построения сплайна является отказ от требования непрерывности второй его производной, т. е. построение сплайна дефекта два. Реализацией данного метода может быть применение кубического эрмитова сплайна дефекта два, представляющего собой кусочно-полиномиальную функцию, составленную из интерполяционных полиномов Эрмита с двумя кратными узлами, кратности два, обладающих свойством локальности, которое заключается в том, что поведение и построение полиномов на каждом интервале не зависит от их поведения на других интервалах.

Точность восстановления промежуточных значений $f(x)$ функции (1) по этому методу несколько ниже, чем при использовании кубического сплайна дефекта один, но применение кубического эрмитова сплайна дефекта два устраняет проблему возникновения осцилляции

¹ Дефект сплайна — это разность между степенью сплайна и порядком его старшей непрерывной производной.

кубического сплайна дефекта один в местах резкого изменения кривизны интерполируемой функции. Это является очень ценным свойством кубического эрмитова сплайна дефекта два, так как позволяет интерполировать изображение с резкими перепадами яркости.

Приведем разработанный алгоритм построения кубического эрмитова сплайна дефекта два $S_{3,2}(x)$.

Пусть задана равномерная сетка $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и известны значения $f_i (i = 0, 1, \dots, n)$ интерполируемой функции в узлах интерполирования x_i (узлах сплайна).

Определим кубический эрмитов сплайн дефекта два $S_{3,2}(x)$ как функцию, удовлетворяющую условиям:

а) на каждом интервале $h_i = x_{i+1} - x_i$ сплайн $S_{3,2}(x)$ является кубическим полиномом вида

$$S_{3,2}(x) = \sum_{l=0}^3 \alpha_l^{(i)} (x - x_i)^l; \quad (2)$$

б) сплайн $S_{3,2}(x)$ принадлежит к множеству $C^1[a, b]$ один раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, т.е.

$$S_{3,2}(x) \in C^1[a, b];$$

в) выполняется условие интерполирования

$$S_{3,2}(x)|_{x=x_i} = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n;$$

г) первая производная сплайна $S'_{3,2}(x)$ равна первой производной интерполируемой функции в узлах интерполирования, $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$, т.е.

$$S'_{3,2}(x)|_{x=x_i} = f'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Из перечисленных условий получим систему уравнений:

$$\begin{cases} f_i = \alpha_0^{(i)}, \\ f_{i+1} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \cdot h_1 + \alpha_2^{(i)} \cdot h_i^2 + \alpha_3^{(i)} \cdot h_i^3, \\ f'_i = \alpha_1^{(i)}, \\ f'_{i+1} = \alpha_1^{(i)} + 2\alpha_2^{(i)} \cdot h_i^2 + 3\alpha_3^{(i)} \cdot h_i^3. \end{cases} \quad (3)$$

Преобразуем систему (4.6) к виду:

$$\begin{cases} \alpha_2^{(i)} \cdot h^2 + \alpha_3^{(i)} \cdot h^3 = f_{i+1} - f_i - f'_i \cdot h, \\ 2\alpha_2^{(i)} \cdot h + 3\alpha_3^{(i)} \cdot h^2 = f'_{i+1} - f'_i. \end{cases} \quad (4)$$

Решим систему (4), определим и значения коэффициентов $\alpha_2^{(i)}$ и $\alpha_3^{(i)}$ (с учетом того, что сетка узлов равномерная, т.е. $h_i = x_{i+1} - x_i$ для всех i)

$$\begin{cases} \alpha_0^{(i)} = f_i, \\ \alpha_1^{(i)} = f_i', \\ \alpha_2^{(i)} = \frac{1}{h_i} \cdot \left(3 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - 2f_i' - f_{i+1}' \right), \\ \alpha_3^{(i)} = \frac{1}{h_i^2} \cdot \left(-2 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + f_i' + f_{i+1}' \right), \end{cases} \quad (5)$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$.

Промежуточные значения $\tilde{f}(x)$ интерполируемой функции $f(x)$ определяются путем подстановки значений $\alpha_l^{(i)}$ в формулу интерполяционного полинома (2) и задания величины $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Как следует из системы (5), для выполнения интерполяционной процедуры необходимо знать величины производных f_i' интерполируемой функции в узлах x_i .

Один вариант реализации вычислений по формулам (2),(5) состоит в замене в этих формулах величин производной интерполируемой функции на значения производной сплайна, определяемые одновременно путем решения системы $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$. Однако этот метод ведет к делокализации интерполяционного процесса, а это требует для своей реализации значительных аппаратных или программных затрат.

Для построения кубического сплайна дефекта два по известным значениям яркости f_i в отсчетах изображения мы использовали приближенное определение значений производной f_i' в узлах интерполирования через разделенные разности первого порядка дискретизированной исходной функции. В качестве основных соотношений, определяющих построение искомого сплайна, использовали формулу (2) и полученную систему (5).

Первая производная в i -ом узле $f'(x_i)$ может быть выражена через первые правые, левые и центральные разделенные разности следующим образом:

$$\Delta_R f_i = \tilde{f}_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}, \quad (6)$$

$$\Delta_L f_i = \tilde{f}_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}, \quad (7)$$

$$\Delta_C f_i = \tilde{f}_i' = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}. \quad (8)$$

Очевидно, что точность аппроксимации первой производной через центральные разности выше, чем через правые или левые, так как центральные разности учитывают поведение интерполируемой функции в двух соседних узлах интерполяции, а правые или левые только в одном. Поэтому для построения сплайна будем использовать аппроксимацию первой производной интерполируемой функции через ее первые центральные разделенные разности.

Подставив выраженные через соотношения (8) приближенные значения производной \tilde{f}_i' и \tilde{f}_{i+1}' в систему (5) и приведя подобные члены, получим новые формулы для определения коэффициентов интерполяционного сплайна:

$$\begin{cases} \alpha_0^{(i)} = f_i, \\ \alpha_1^{(i)} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \\ \alpha_2^{(i)} = \frac{2f_{i-1} - 5f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h^2}, \\ \alpha_3^{(i)} = \frac{-f_{i-1} + 3f_i - 3f_{i+1} + f_{i+2}}{2h^3}, \end{cases} \quad (9)$$

$i = 1, 2, \dots, n-2; \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Для построения сплайна на каждом интервале $x \in [x_i, x_{i+1}]$ по формулам (9) требуется только четыре значения интерполируемой функции в узлах $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$, т.е. процедура интерполирования локальна.

Интерполирование по разработанному алгоритму для практического применения удобнее представить как операцию линейной фильтрации в цифровом нерекурсивном фильтре третьего порядка, называемом интерполятором. Для этого проведем следующее преобразование.

Подставляя формулы (9) для коэффициентов $\alpha_l^{(i)}$ ($l = 0, 1, 2, 3$) в выражение полинома (2) и заменив аргумент $x \in [x_i, x_{i+1}]$ выражением $(x_i + ph)$, можно найти:

$$\begin{aligned} S_{3,2}(x_i + ph) = \\ = f_i + ph\left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}\right) + (ph)^2\left(\frac{2f_{i-1} - 5f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h^2}\right) + (ph)^3\left(\frac{-f_{i-1} + 3f_i - 3f_{i+1} + f_{i+2}}{2h^3}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

при $0 \leq p \leq 1$ и $i = 1, 2, \dots, n-2$.

где h - интервал между отсчетами $(x_{i+1} - x_i)$.

Будем считать интервал между отсчетами h равным единице. Тогда сплайн $S_{3,2}(x)$ (10) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{3,2}(x_i + p) = \\ = f_i + p\left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2}\right) + p^2\left(\frac{2f_{i-1} - 5f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2}\right) + p^3\left(\frac{-f_{i-1} + 3f_i - 3f_{i+1} + f_{i+2}}{2}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

при $0 \leq p \leq 1$ и $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Представим сплайн $S_{3,2}(x)$ в виде:

$$S_{3,2}(x_i + p) = \sum_{q=-1}^2 f_{i-q+1} \cdot \beta_q(x_i + p - q), \quad (12)$$

при $0 \leq p \leq 1$ и $i = 1, 2, \dots, n-2$,

где β_q - коэффициенты интерполирования.

Приравнявая правые части формул (11) и (12), определим выражения для коэффициентов интерполирования $\beta_q(x_i + p - q)$ (оггибающей импульсной характеристики интерполирующего фильтра):

$$\begin{cases} \beta_2(x_i + p + 2) = -0,5p^2 + 0,5p^3, \\ \beta_1(x_i + p + 1) = 0,5p + 2p^2 - 1,5p^3, \\ \beta_0(x_i + p) = 1 - 2,5p^2 + 1,5p^3, \\ \beta_{-1}(x_i + p - 1) = -0,5p + p^2 - 0,5p^3. \end{cases} \quad (13)$$

Выражение (12) рассматриваем как свертку на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ дискретной функции $(f_{i+2}; f_{i+1}; f_i; f_{i-1})$ с импульсной характеристикой β_q интерполирующего фильтра, которую можно рассчитать заранее, задавая различные значения p в формулы (13).

По результатам расчетов значений β_q построен график огибающей импульсной характеристики фильтра (рис.2), которая симметрична относительно центрального узла. Фильтр может иметь линейную, а при определенных условиях и нулевую фазовую характеристику.

t := -2, -1.99.. -1

bm(t) := -0.5 (t + 2)² + 0.5 (t + 2)³

t2 := -1, -0.99.. 0

bm0(t2) := 0.5 (t2 + 1) + 2 (t2 + 1)² - 1.5 (t2 + 1)³

t3 := 0, 0.11.. 1

bm1(t3) := 1 - 2.5 (t3)² + 1.5 (t3)³

t4 := 1, 1.11.. 2

bm2(t4) := -0.5 (t4 - 1) + (t4 - 1)² - 0.5 (t4 - 1)³

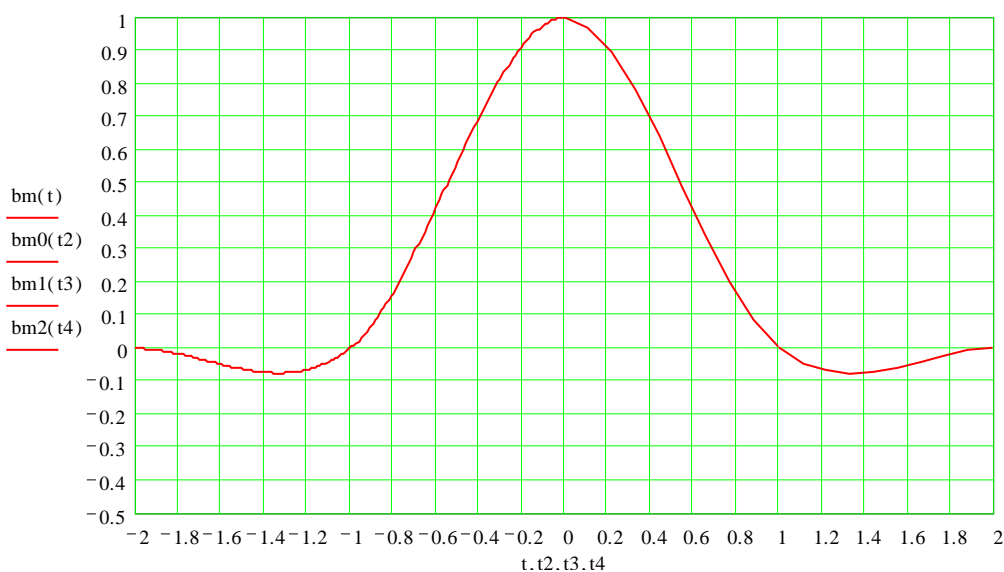


Рис.2. Огибающая импульсной характеристики интерполирующего фильтра для построения сплайна $S_{3,2}(x)$

Практическое удобство интерполирования по формуле (12) заключается в том, что огибающую импульсной характеристики фильтра (13) можно рассчитать заранее (она не зависит от f_i) и хранить в постоянном запоминающем устройстве при аппаратурной реализации алгоритма или в массиве коэффициентов при реализации в виде компьютерной программы. Для получения требуемого набора коэффициентов β_q при выполнении процедуры интерполирования необходимо только задать величину p , являющуюся в данном случае адресом обращения к ячейкам постоянного запоминающего устройства или индексом массива. Остальные расчеты по формуле (12) выполняются просто даже в реальном масштабе времени.

Однако, как показали эксперименты, хотя визуально обработанное изображение телевизионного аэроснимка и воспринимается как хорошее, по данному методу не удастся добиться качества изображения, обработанного с помощью нелокального сплайна, так как вторая производная интерполирующей функции может быть разрывна. Поэтому представляет интерес определения метода локального построения интерполяционного сплайна, обеспечивающего не только непрерывность первой и второй производных интерполирующей функции, но и равенство их соответственно первой и второй производным интерполируемого изображения в узлах интерполяции (отсчетах интерполируемой функции). Реализация данного метода устранит упомянутые выше недостатки.

Указанная цель достигается разработкой способа построения локального интерполяционного эрмитова сплайна пятой степени дефекта три, составленного из кусочных полиномов Эрмита с двумя кратными узлами кратности три. С помощью данного сплайна можно обеспечивать непрерывность самой интерполируемой функции и двух ее производных и, благодаря локальности его построения, обрабатывать дискретизированное изображение в реальном масштабе времени.

Построим алгоритм вычисления значений эрмитова сплайна пятой степени дефекта три $S_{5,3}(x)$.

Вновь предположим, что на интервале $[a, b]$ задана сетка $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и известны значения f_i интерполируемой функции, ее первой f_i' и второй f_i'' производных.

Тогда эрмитовым сплайном пятой степени дефекта три $S_{5,3}(x)$ будем называть функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

а) на каждом интервале $h_i = x_{i+1} - x_i$ сплайн $S_{5,3}(x)$ является полиномом пятой степени

$$S_{5,3}(x) = \sum_{l=0}^5 \alpha_l^{(i)} (x - x_i)^l ; \quad (14)$$

б) сплайн $S_{5,3}(x)$ принадлежит к множеству $C^2[a, b]$ дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, т.е.

$$S_{5,3}(x) \in C^2[a, b] ;$$

в) выполняется условие интерполирования

$$S_{5,3}(x) \Big|_{x=x_i} = f_i , \quad i = 0, 1, \dots, n ;$$

г) первая производная сплайна $S_{5,3}'(x)$ равна первой производной интерполируемой функции в узлах интерполирования, $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$, т.е.

$$S_{5,3}'(x) \Big|_{x=x_i} = f_i' , \quad i = 0, 1, \dots, n ;$$

д) вторая производная сплайна $S_{5,3}''(x)$ равна второй производной интерполируемой функции в узлах интерполирования, $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$, т.е.

$$S_{5,3}''(x)|_{x=x_i} = f_i'', \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Из перечисленных условий получим систему уравнений:

$$\begin{cases} f_i = \alpha_0^{(i)}, \\ f_i' = \alpha_1^{(i)}, \\ f_i'' = 2\alpha_2^{(i)}, \\ f_{i+1} = f_i + f_i'(x_{i+1} - x_i) + \frac{f_i''}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \alpha_3^{(i)}(x_{i+1} - x_i)^3 + \alpha_4^{(i)}(x_{i+1} - x_i)^4 + \alpha_5^{(i)}(x_{i+1} - x_i)^5, \\ f_{i+1}' = f_i' + f_i''(x_{i+1} - x_i) + 3\alpha_3^{(i)}(x_{i+1} - x_i)^2 + 4\alpha_4^{(i)}(x_{i+1} - x_i)^3 + 5\alpha_5^{(i)}(x_{i+1} - x_i)^4, \\ f_{i+1}'' = f_i'' + 6\alpha_3^{(i)}(x_{i+1} - x_i) + 12\alpha_4^{(i)}(x_{i+1} - x_i)^2 + 20\alpha_5^{(i)}(x_{i+1} - x_i)^3, \end{cases} \quad (15)$$

решение которой позволяет определить значения $\alpha_3^{(i)}$, $\alpha_4^{(i)}$ и $\alpha_5^{(i)}$; индекс i показывает, что коэффициенты $\alpha_l^{(i)}$ с данным индексом входят в интерполяционный полином только на интервале $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Решение системы уравнений (15) имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_0^{(i)} = f_i, \\ \alpha_1^{(i)} = f_i', \\ \alpha_2^{(i)} = \frac{f_i''}{2}, \\ \alpha_3^{(i)} = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^3} \cdot [10(f_{i+1} - f_i) - 4(f_{i+1}' - 6f_i')(x_{i+1} - x_i) + (0,5f_{i+1}'' - 1,5f_i'')(x_{i+1} - x_i)^2], \\ \alpha_4^{(i)} = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^4} \cdot [-15(f_{i+1} - f_i) + (7f_{i+1}' + 8f_i')(x_{i+1} - x_i) - (f_{i+1}'' - 1,5f_i'')(x_{i+1} - x_i)^2], \\ \alpha_5^{(i)} = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^5} \cdot [6(f_{i+1} - f_i) - (3f_{i+1}' + 3f_i')(x_{i+1} - x_i) + 0,5(f_{i+1}'' - f_i'')(x_{i+1} - x_i)^2], \end{cases} \quad (16)$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$.

Для вычисления промежуточных значений интерполируемой функции внутри интервала $[x_i, x_{i+1}]$ значения $\alpha_l^{(i)}$ надо подставить в полином (14) и задать значения величин $x \in [x_i, x_{i+1}]$, определяющих положение искомого промежуточного значений внутри интервала интерполирования $[x_i, x_{i+1}]$.

Использование первых разделенных разностей в качестве приближенных значений первой производной интерполируемой функции, позволившее осуществить интерполирование кубическим сплайном дефекта два в реальном масштабе времени при небольших аппаратных затратах, предварило разработку метода вычисления искомого локального интерполяционного сплайна $S_{5,3}(x)$. Сущность данного метода состоит в приближенном определении значений первой \tilde{f}_i' и второй \tilde{f}_i'' производных в узлах интерполирования x_i через разделенные разности первого и второго порядка дискретизированной исходной функции и использовании этих значений для построения сплайна $S_{5,3}(x)$.

При постановке задачи принято, что интервал $[x_i, x_{i+1}]$ между отсчетами является постоянным. Величину этого интервала опять принимаем равную единице. Тогда выражения для первой разделенной разности Δf_i и второй разделенной разности $\Delta^2 f_i$, вычисляемые по трем отсчетам, имеют вид:

$$\Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \quad (17)$$

$$\Delta^2 f_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}. \quad (18)$$

Подставляя приближенные значения (17) и (18) первой и второй производных в формулы (16), можно определить:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0^{(i)} = f_i, \\ \alpha_1^{(i)} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \\ \alpha_2^{(i)} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}, \\ \alpha_3^{(i)} = \frac{-3f_{i+2} + 9f_{i+1} - 9f_i + 3f_{i-1}}{2h^3}, \\ \alpha_4^{(i)} = \frac{5f_{i+2} - 15f_{i+1} + 15f_i - 5f_{i-1}}{2h^4}, \\ \alpha_5^{(i)} = \frac{-f_{i+2} + 3f_{i+1} - 3f_i + f_{i-1}}{h^5}, \end{array} \right. \quad (19)$$

$i = 1, 2, \dots, n-2$.

Процедура построения интерполяционного сплайна по разработанному алгоритму является локальной, так как для построения сплайна на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ в данном случае требуется только четыре отсчета интерполируемой функции $f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$.

Интерполирование по разработанному алгоритму также можно представить как операцию линейной фильтрации в цифровом нерекурсивном фильтре третьего порядка (как и в описании метода интерполирования кубическими эрмитовыми сплайнами дефекта два $S_{3,2}(x)$).

Задавая значение интервала h , равным 1, подставляя формулы (19) для коэффициентов $\alpha_l^{(i)}$ ($l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) в полином (14) и заменив аргумент $x \in [x_i, x_{i+1}]$ выражением $(x_i + p)$, можно найти:

$$\begin{aligned} S_{5,3}(x_i + p) &= f_i + p \cdot \left(\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2}\right) + p^2 \cdot \left(\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2}\right) + p^3 \cdot \left(\frac{-3f_{i+2} + 9f_{i+1} - 9f_i + 3f_{i-1}}{2}\right) + \\ &+ p^4 \cdot \left(\frac{5f_{i+2} - 15f_{i+1} + 15f_i - 5f_{i-1}}{2}\right) + p^5 \cdot (-f_{i+2} + 3f_{i+1} - 3f_i + f_{i-1}), \\ 0 \leq p \leq 1, \end{aligned} \quad (20)$$

Путем приравнивания правых частей выражения (20) и соотношения

$$S_{5,3}(x_i + p) = \sum_{q=-1}^2 f_{i-q+1} \cdot \gamma_q(x_i + p - q), \quad (21)$$

при $0 \leq p \leq 1$ и $i = 1, 2, \dots, n-2$

определяются формулы для коэффициентов интерполирования $\gamma_q(x_i + p - q)$ (огibaющей импульсной характеристики интерполирующего фильтра):

$$\begin{cases} \gamma_2(x_i + p + 2) = -1,5p^3 + 2,5p^4 - p^5, \\ \gamma_1(x_i + p + 1) = 0,5p + 0,5p^2 + 4,5p^3 - 7,5p^4 + 3p^5, \\ \gamma_0(x_i + p) = 1 - p^2 - 4,5p^3 + 7,5p^4 - 3p^5, \\ \gamma_{-1}(x_i + p - 1) = -0,5p + 0,5p^2 + 1,5p^3 - 2,5p^4 + p^5. \end{cases} \quad (22)$$

Выражения (21), аналогично (12), также будем рассматривать как свертку на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ дискретной функции $f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$ с импульсной характеристикой γ_q интерполирующего фильтра, которую можно рассчитать, задавая различные значения p в формулы (22). Результат расчета представлен на рис.3.

$$t := -2, -1.99.. -1$$

$$bm(t) := -1.5(t+2)^3 + 2.5(t+2)^4 - (t+2)^5$$

$$t2 := -1, -0.99.. 0$$

$$bm0(t2) := [0.5(t2+1) + 0.5(t2+1)^2] + 4.5(t2+1)^3 - 7.5(t2+1)^4 + 3(t2+1)^5$$

$$t3 := 0, 0.11.. 1$$

$$bm1(t3) := [1 - (t3)^2] - 4.5(t3)^3 + 7.5(t3)^4 - 3(t3)^5$$

$$t4 := 1, 1.11.. 2$$

$$bm2(t4) := [-0.5(t4-1) + 0.5(t4-1)^2] + 1.5(t4-1)^3 - 2.5(t4-1)^4 + (t4-1)^5$$

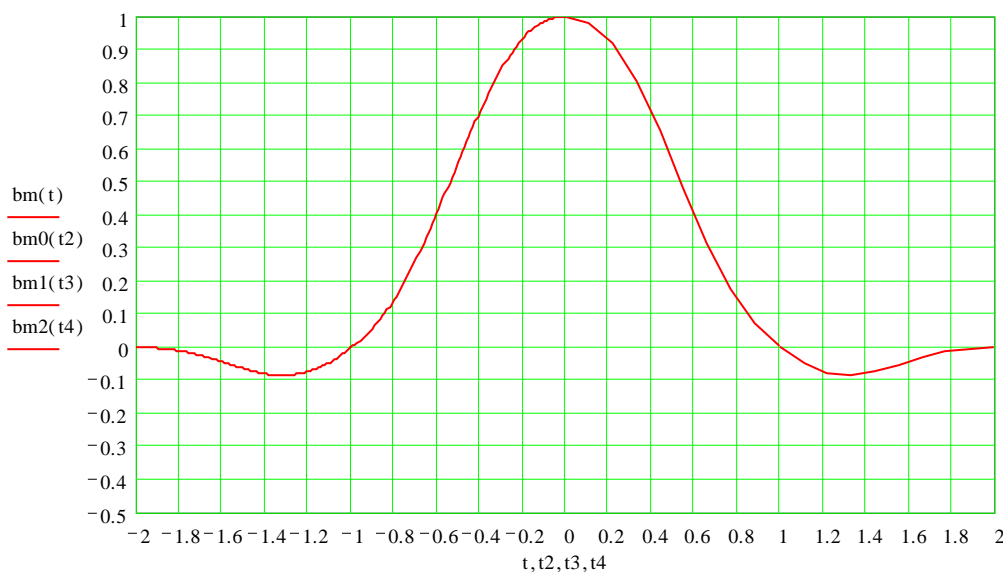


Рис.3. Огибающая импульсной характеристики интерполирующего фильтра для построения сплайна $S_{5,3}(x)$

Огибающая характеристики симметрична относительно центрального отсчета. Следовательно, и этот фильтр может иметь линейную или при определенных условиях нулевую фазовую характеристику.

Практическое применение данного фильтра аналогично применению интерполирующего фильтра, строящего кубический эрмитов сплайн дефекта два. Экспериментальные исследования подтвердили возможность высококачественного изменения масштаба дискретизированного изображения на основе построения локального эрмитова сплайна пятой степени дефекта три в реальном масштабе времени.

Разработанные алгоритмы одномерной интерполяции дискретизированного изображения, выполняемой при изменении его масштаба, являются хорошей основой для построения алгоритма быстрой двумерной обработки такого изображения. Вследствие недостаточного быстродействия элементной базы, ранее обработка дискретизированного изображения (в частности, телевизионного изображения, формируемого при аэросъемке и передаваемого с борта беспилотного летательного аппарата) в реальном масштабе времени обычно выполнялась по принципам разделимого алгоритма, т.е. первоначально в одном направлении, а затем в перпендикулярном ему. Это создавало определенные трудности, связанные с организацией хранения промежуточных результатов вычислений.

Современные аппаратные средства цифровой обработки сигналов позволяют осуществить обработку изображения в двумерном варианте в реальном времени. Двумерная процедура интерполяции изображения размерами n строк по m элементов в строке может быть представлена в виде следующего выражения:

$$S((x_i + p), (y_j + q)) = \sum_{m=-ln=-1}^2 \sum_{n=-1}^2 f_{(i-m+1), (j-n+1)} \cdot \lambda_m(x_i + p - m) \cdot \eta_n(y_j + q - n), \quad (23)$$

при $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, m - 2$ и $j = 1, 2, \dots, n - 2$,

где λ_m и η_n - коэффициенты интерполирования.

В соответствии с выражением (23) для вычисления одного результирующего значения двумерной обработки требуется выполнить следующую группу операций:

- сформировать массив из 16 элементов исходного изображения (по 4 соседних элемента из 4 соседних строк), между которых находится точка (рис.4), в которой требуется определить значение интерполируемой функции;
- исходя из величин сдвига p и q внутри интервала интерполяции, при программной реализации по формулам (13) или (22) (в зависимости от степени выбранного интерполяционного сплайна) параллельно произвести ($4 \cdot 4 = 16$) вычислений значений коэффициентов интерполирующего фильтра или при аппаратной реализации выполнить ($4 \cdot 4 = 16$) выборок коэффициентов из ПЗУ;
- параллельно выполнить ($4 \cdot 4 = 16$) умножений значений отсчетов изображения на эти коэффициенты и ($3 + 4 \cdot 3 = 15$) сложений промежуточных результатов за один интервал дискретизации изображения при его обработке в реальном масштабе времени.

На современной элементной базе это реализуемо.

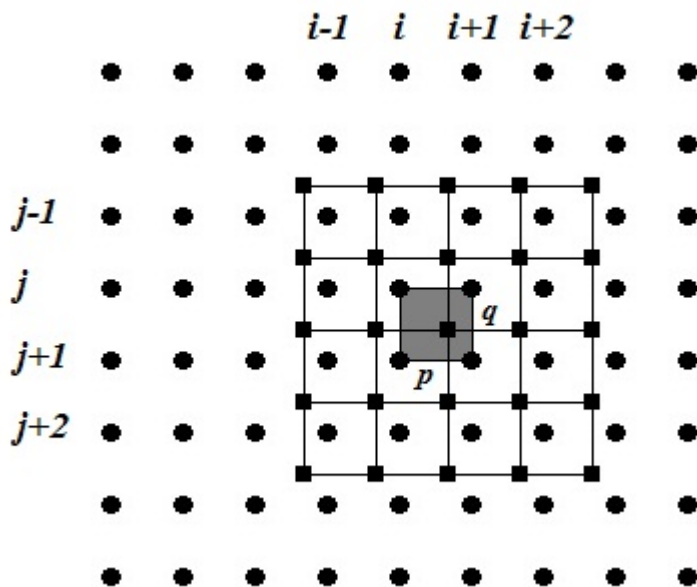


Рис.4. К вычислению интерполированного значения яркости элемента изображения (заштрихованная область – двухмерный интервал интерполяции, внутри которого находится интерполируемый элемент)

Для осуществления параллельной выборки из ПЗУ требуется сформировать двухмерный массив значений импульсной характеристики интерполирующего фильтра. Значения каждого отсчета двухмерной импульсной характеристики формируются путем умножения одного значения импульсной характеристики одномерного фильтра, располагаемые, например, вдоль оси x , на одно значение такой же импульсной характеристики, расположенной перпендикулярно (в данном случае расположенной вдоль оси y).

Для формирования двухмерного массива значений импульсной характеристики размерами n строк по n элементов в строке требуется выполнить n^2 умножений. Сформированный двухмерный массив значений импульсной характеристики интерполирующего фильтра позволяет осуществить параллельную выборку 16 отсчетов импульсной характеристики, необходимых для формирования интерполированного значения параллельным методом.

Чтобы проверить и при необходимости откорректировать полученные теоретические материалы авторами были разработаны пакеты специального программного обеспечения [7-9], позволившие удостовериться в правильности и эффективности разработанных принципах и алгоритмах интерполяции. Кроме того, как показали экспериментальные исследования, четкость и детальность обработанного телевизионного аэроснимка можно повысить, выбирая степень интерполяционного сплайна в зависимости от содержания изображения.

Список литературы

1. Игнатьев Н.К. Дискретизация и ее приложения. М., «Связь», 1980.
2. Макаренко А.А. Выбор метода интерполяции для цифровой обработки изображений. «ТСС», серия «ТТ», 1983, вып.4.
3. Макаренко А.А. Способ изменения размеров телевизионного изображения в реальном масштабе времени. «ТСС», серия «ТТ», 1984, вып.6.
4. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. Springer-Verlag, NY Inc., 1980.
5. Завьялов Ю.С. [и др.]. Методы сплайн-функций. М., «Наука», 1980.
6. Шикин Е. В., Плис Л. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. — М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996.

7. Анцев Г.В., Макаренко А.А., Турнецкий Л.С. Программа предварительной обработки телевизионного аэроснимка, формируемого бортовой телевизионной системой летательного аппарата. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008611178, РОСПАТЕНТ, 05 марта 2008.
8. Анцев Г.В., Турнецкий Л.С., Макаренко А.А., Волков В.Ю., Рогачев В.А. Программ-имитатор оптикоэлектронного изображения. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008611261, РОСПАТЕНТ, 13 марта 2008.
9. Анцев Г.В., Турнецкий Л.С., Макаренко А.А., Волков В.Ю., Рогачев В.А. Программа преобразования оптикоэлектронного изображения и анализа результатов преобразования. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008613707, РОСПАТЕНТ, 31 июля 2008.

