

УДК 622.691-50

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИЛЬНО-НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ ГАЗА В ГТС¹

С.В. Спиридонов, А.М. Сальников, А.В. Ахметзянов

*Учреждение Российской академии наук**Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

117997, ГСП-7, В-342, Москва, Профсоюзная, 65

E-mail: spirid@ipu.ru, salnikov@ipu.ru, atlas@ipu.ru

В работе рассматриваются методы моделирования сильно-нестационарных потоков газа в газотранспортных системах (ГТС) произвольной конфигурации, т.е. содержащих внутренние и внешние замкнутые контуры. Вычислительное моделирование определяется, как обобщенное решение начально-краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами, описывающих нестационарные распределения давлений и потоков в ГТС. Число уровней иерархии вычислений определяется структурой ГТС. Предлагаемые методы чрезвычайно актуальны для решения основных проблем диспетчерского управления сильно-нестационарными потоками газа в ГТС и ориентированы на параллельную организацию вычислительных процедур с использованием многопроцессорных вычислительных комплексов.

PARALLEL SIMULATION OF STRONGLY NON-STATIONARY GAS FLOW IN GTS / S.V. Spiridonov, A.M. Salnikov, A.V. Akhmetzyanov (Institute of Control Sciences, Russia, 117997, Moscow, Profsoyuznaya, 65) The paper describes parallel simulation of strongly non-stationary gas flow in any configuration GTS. Number of levels on the hierarchy computing is defined by GTS structure. These methods are most suitable for solving critical dispatcher control problems, for example, accidents in GTS.

¹ Работа выполнена по гранту РФФИ № 08-00503а.

Введение

Проблемы управления процессами транспорта газа в ГТС, включая Единую систему газоснабжения (ЕСГ) в целом, не могут быть решены без создания универсальных и адекватных моделей распределения давлений и потоков в них. В общем случае, на пути создания таких моделей возникают затруднения, связанные с большой размерностью задачи и наличием в уравнении движения: разрывных параметров, инерционного $\partial(\rho w)/\partial t$ и нелинейного $S\rho w^2$ слагаемых, где ρ и w – плотность и скорость газа, S – площадь гидравлического сечения газопровода и инерционного слагаемых. Размерность определяется выбором шага сеточной аппроксимации исходной начально-краевой задачи для исходной нелинейной системы уравнений. Разрывные параметры допускают только обобщенные решения. При учете нелинейных зависимостей размерность задачи резко возрастает, поскольку решение системы нелинейных уравнений обычно сводится к решению последовательности линейных систем и другие методы либо недопустимы, либо нецелесообразны. Инерционное слагаемое может вызывать волновые фронты давления при резких скачкообразных изменениях по времени граничных условий в аварийных условиях, что вызывает необходимость существенного измельчения шага сеточной аппроксимации, т.е. к еще большему увеличению размерности.

Основной проблемой сеточной (конечно-разностной, конечно-объемной, конечно-элементной и др.) аппроксимации, т.е. численного моделирования, является большая размерность сеточного пространства, следовательно, для реальных ГТС объемы и длительность процедур необходимых вычислений невозможно реализовать без иерархического распараллеливания вычислений с использованием многопроцессорных вычислительных комплексов параллельного действия.

При изотермическом ($T = const$) течении реального газа ($p/\rho = zRT$) нестационарное распределение давления $p(x,t)$ вдоль неразветвленного участка газопровода в момент времени t описывается системой уравнений в частных производных [1]

$$(1) \quad \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\lambda |q|}{d} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, 0 \leq x \leq l, t \geq 0.$$

где $P = p^2$ – квадрат давления, $q = \rho w$ – массовый расход через единичную площадь гидравлического сечения трубы ($S=1$), $\rho = p/c^2$ – плотность газа, z – коэффициент сжимаемости газа, R – газовая постоянная, T – абсолютная температура, c – скорость звука в газе, λ – коэффициент гидравлического сопротивления, d – диаметр гидравлического сечения трубы, l – длина участка газопровода. Характер обобщенных решений системы (1) определяется наличием (сильно нестационарное решение) или отсутствием (слабо нестационарное решение) влияния инерционных сил, т.е. слагаемого $\partial q/\partial t = \partial(\rho w)/\partial t$ в правой части уравнения движения системы (1).

В нормальных условиях поток газа в газопроводе влиянию инерционных сил практически не подвергается, т.е. волновые составляющие в решении системы (1) отсутствуют, следовательно, вместо (1) можно рассматривать упрощенную систему

$$(2) \quad \left(\frac{2\lambda |q|}{d} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, 0 \leq x \leq l, t \geq 0 \right).$$

В задачах диспетчерского управления при нормальных условиях эксплуатации газотранспортных сетей нестационарные модели распределения потоков газа определяются как начально-краевая задача для обобщенного уравнения типа (2), а при аварийных

ситуациях – типа (1). Начально-краевые условия определяются соотношениями любой (но только одной) из следующих строк

$$(3) \quad \begin{aligned} P(0,t) &= P_{\text{лев}}, p(l,t) = P_{\text{пр}}(t), P(x,0) = P(x,0) = P_0(x); \\ P(0,t) &= P_{\text{лев}}, q(l,t) = q_{\text{пр}}(t), P(x,0) = P(x,0) = P_0(x); \\ q(0,t) &= q_{\text{лев}}(t), q(l,t) = q_{\text{пр}}(t), p(x,0) = P(x,0) = P_0(x), \end{aligned}$$

где $P_0(x)$ – распределение давления вдоль участка в начальный момент времени $t = 0$, $P_{\text{лев}}(t), P_{\text{пр}}(t), q_{\text{лев}}(t), q_{\text{пр}}(t)$ – заданные функции изменения давления и расхода на границах участка в рассматриваемом интервале времени $[0, T]$.

В работе рассматриваются задачи моделирования нестационарных процессов в ГТС возникающих при наличии (сильная нестационарность) влияния инерционных сил, т.е. обобщенного решения начально-краевой задачи для нелинейных уравнений гиперболического (1) типа с разрывными коэффициентами и граничными условиями. Разрывы граничных условий соответствуют либо скачкам давления на КС, либо скачкообразным изменениями массового расхода в пунктах притока и отбора газа. Следовательно, в точках разрыва должны соблюдаться либо условия баланса давлений $P(x+0) - P(x-0) = \Delta P(x)$, либо – расходов $q(x+0) - q(x-0) = \Delta q(x)$, либо и то и другое вместе, а это эквивалентно наличию внутренних объемных источников. Это означает, что в уравнениях (1) или (2) появляются – функции распределения источников f в их правых частях. При этом, для решения начально-краевой задачи для нелинейных уравнений (2) или (1) используются, соответственно, метод конечных объемов (МКО) или метод конечных элементов (МКЭ), т.е. балансовая или вариационная аппроксимации исходных уравнений движения и непрерывности (неразрывности) среды (потока газа).

Предполагается, что слабая нестационарность потоков газа характерна для режимов нормальной эксплуатации ГТС с плавными изменениями давления и отборов газа во времени, т.е. с малыми градиентами давления по времени. Сильная нестационарность – характерна для переходных режимов ГТС в чрезвычайных или аварийных ситуациях, т.е. с достаточно большими градиентами давления по времени, если это допустимо.

Вариационные методы моделирования сильно-нестационарных потоков газа

При решении начально-краевых задач для уравнения гиперболического типа (1) обычно используют явную или неявную сеточные аппроксимации по времени

$$(4) \quad \gamma \frac{P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}}{\tau^2} + \sigma \frac{P^{(n+1)} - P^{(n-1)}}{2\tau} - \text{divgrad} P^{(n)} = f^{(n)},$$

$$(5) \quad \gamma \frac{P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}}{\tau^2} + \sigma \frac{P^{(n+1)} - P^{(n-1)}}{2\tau} - \text{divgrad} P^{(n+1)} = f^{(n+1)},$$

где $\gamma = 1/2c^2$, $\sigma = \lambda |q| / d$, $P^{(n+1)} = P^{(n+1)}(x), P^{(n)} = P^{(n)}(x), P^{(n-1)} = P^{(n-1)}(x)$ – значения функции распределения давления на временных слоях $t_{n+1} = (n+1)\tau, t_n = n\tau, t_{n-1} = (n-1)\tau (t_0 = 0)$, причем $P^{(n)}$ и $P^{(n-1)}$ заданы как начальные условия.

При заданных начально-краевых условиях сеточные аппроксимации (4) и (5) по пространственной координате x с использованием метода конечных элементов (МКЭ) выражаются матричными уравнениями [1,2]

$$(6) \quad \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma \right) \mathbf{P}^{(n+1)} - \left(\frac{2}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma - \mathbf{B} \right) \mathbf{P}^{(n)} + \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma - \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma \right) \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{G}^{(n)},$$

$$(7) \quad \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma + \mathbf{B} \right) \mathbf{P}^{(n+1)} - \frac{2}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma \mathbf{P}^{(n)} + \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma - \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma \right) \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{G}^{(n+1)},$$

где матрицы \mathbf{B} , \mathbf{C}_γ и \mathbf{C}_σ – матрицы, соответствующие МКЭ аппроксимациям членов $\text{divgrad} P$, $\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ и $\frac{\lambda|q|}{d} \frac{\partial P}{\partial t}$, соответственно. Если положить $\sigma = \lambda|q^{(n)}|/d$, то матричные уравнения (6) и (7) становятся линейными системами алгебраических уравнений $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{F}$, матрицы и правые части которых определяются, соответственно, формулами

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma, \quad \mathbf{F} = \mathbf{G}^{(n)} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{C}_\gamma \mathbf{P}^{(n)} - \mathbf{B} \mathbf{P}^{(n)} - \frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\sigma \mathbf{P}^{(n-1)} + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma \mathbf{P}^{(n-1)};$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{C}_\gamma + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}_\sigma + \mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{G}^{(n+1)} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{C}_\gamma \mathbf{P}^{(n)} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{C}_\gamma - \frac{1}{2\Delta t} \right) \mathbf{C}_\sigma \mathbf{P}^{(n-1)}.$$

Для уравнений (6) и (7) матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и величины $q^n = q(x_k, t)|_{t=n\tau}$ при конечно-элементных аппроксимациях [1,2] на n -м временном слое определяются следующими схемами вычислений. На каждой магистральной ветви газопровода $\Omega_i = [0, l_i]$ выберем точки x_{k_i} , ($0 = x_{1_i} \dots \leq x_{k_i} < \dots < x_{N_i} = l_i$), а полученные открытые интервалы $\Omega_{k_i} = (x_{k_i}, x_{k_{i-1}})$, $k_i = 1, N_i - 1$ длины $h_k = x_{k+1} - x_k$, выберем в качестве конечных элементов (схема на рис. 1а).

В дальнейшем для простоты, когда это допустимо без ущерба изложению, индексы второй ступени i пропущены, но подразумеваются.

Напомним, что при конечно элементной аппроксимации уравнения (5) обобщенное решение соответствующей начально-краевой задачи вычислительного моделирования представляется в виде линейной комбинации базисных функций ψ_k , $k = \overline{1, N}$ равный единице в k -м узле и нулю во всех остальных, т.е. как решение системы уравнений

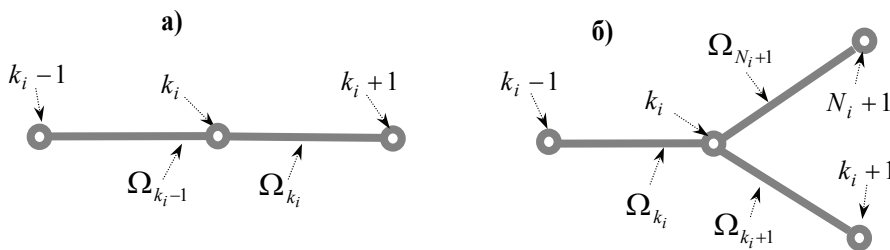


Рис. 1. Схемы конечного объема простого и разветвленного узлов.

$$(8) \quad \sum_{k=1}^N \left(\int_{\Omega} \text{grad} \psi_j \text{grad} \psi_k d\Omega + \int_{\Omega} \sigma P \psi_j \psi_k d\Omega + \int_{\Omega} \gamma P \psi_j \psi_k d\Omega + \int_{S_3} \beta P \psi_j \psi_k dS \right) P_k = \\ = \int_{\Omega} f \psi_j d\Omega + \int_{S_2} \theta \psi_j dS + \int_{S_3} \beta P_{\beta} \psi_j dS, \quad j, k \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}.$$

Базисные функции а следовательно и конечные элементы, могут быть линейными, квадратичными, кубическими (лагранжевыми и эрмитовыми) и более высокого порядка.

На каждом конечном элементе Ω_k введем локальную нумерацию узлов с локальными координатами $x_1^{(k)} = x_k$, $x_2^{(k)} = x_{k+1}$ и будем рассматривать шаблонный элемент локальный переменной $\xi = (x - x_k) / h_k$ и с локальными базисными функциями $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$, соответствующими ненулевым базисным функциям ψ_k и ψ_{k+1} , в соответствии с локальной нумерацией, обозначим, как $\psi_1^{(e)}$ и $\psi_2^{(e)}$, соответственно. Аналогично, через $P_1^{(k)} = P_k$, $P_2^{(k)} = P_{k+1}$ и $f_1^{(k)} = f_k$, $f_2^{(k)} = f_{k+1}$ обозначим коэффициенты (веса) в соответствующих разложениях решения и вектора правой части по этим базисным функциям. Тогда вклад от конечного элемента Ω_k в систему уравнений выражается формулой $\mathbf{B}^{(k)} \mathbf{P}^{(k)} + \mathbf{C}_{\sigma}^{(k)} \mathbf{P}^{(k)} + \mathbf{C}_{\gamma}^{(k)} \mathbf{P}^{(k)} - \mathbf{G}^{(k)}$, где $\mathbf{P}^{(k)} = (P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$ – локальный вектор неизвестного решения. Причем первые три слагаемых определяют вклады Ω_k в соответствующие слагаемые левой части (8), четвертое – в первое слагаемое правой части (8).

Явные и неявные вычислительные процедуры решения уравнений (4) и (5) строятся с использованием следующей модификации МКЭ. Разобьем линейный участок газопровода $\Omega = [0, l]$ узлами сеточной аппроксимации $0 = x_0 < \dots < x_k < \dots < x_K = l$ на конечные элементы $\Omega_k = (x_k, x_{k+1})$, $k = \overline{1, K-1}$ длины $h_k = x_{k+1} - x_k$. Следуя традициям на каждом двух узлом шаблонном элементе, введя локальную координату $\xi = (x - x_k) / h_k$, в зависимости от требований точности вычислений можно построить кусочно-полиномиальные (линейные, квадратичные и кубические) локальные базисные функции. Элементы локальных матриц $\widehat{\mathbf{B}}$ и $\widehat{\mathbf{C}}_{\gamma} = \widehat{\mathbf{C}}_{\sigma}$ через заданные на интервале $(0, 1)$ шаблонные базисные функции по формулам

$$\widehat{b}_{jk} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\widehat{\psi}_j(x)}{dx} \frac{d\widehat{\psi}_k(x)}{dx} dx = \frac{1}{h_k} \int_0^1 \frac{d\widehat{\varphi}_j(\xi)}{d\xi} \frac{d\widehat{\varphi}_k(\xi)}{d\xi} d\xi,$$

$$(\widehat{c}_{ij})_{\gamma} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \gamma \widehat{\psi}_j(x) \widehat{\psi}_k(x) dx = \gamma h_k \int_0^1 \widehat{\varphi}_j(\xi) \widehat{\varphi}_k(\xi) d\xi,$$

$$(\widehat{c}_{ij})_{\sigma} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sigma \widehat{\psi}_j(x) \widehat{\psi}_k(x) dx = \sigma h_k \int_0^1 \widehat{\varphi}_j(\xi) \widehat{\varphi}_k(\xi) d\xi.$$

Для линейных шаблонных базисных функций $\widehat{\varphi}_1(\xi) = 1 - \xi$ и $\widehat{\varphi}_2(\xi) = \xi$ локальные матрицы имеют вид

$$\widehat{\mathbf{B}} = \frac{1}{h_k} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{C}}_{\gamma} = \frac{\gamma h_k}{6} \mathbf{C}, \quad \widehat{\mathbf{C}}_{\sigma} = \frac{\sigma h_k}{6} \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Локальные матрицы, вычисленные для квадратичных шаблонных базисных функций $\widehat{\varphi}_1(\xi) = 2(\xi - 1/2)(\xi - 1)$, $\widehat{\varphi}_2(\xi) = -4\xi(\xi - 1)$ и $\widehat{\varphi}_1(\xi) = 2\xi(\xi - 1/2)$ имеют вид

$$\widehat{\mathbf{B}} = \frac{1}{3h_k} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{C}}_\gamma = \frac{\gamma h_k}{30} \mathbf{C}, \widehat{\mathbf{C}}_\sigma = \frac{\sigma h_k}{30} \mathbf{C}.$$

Использование лагранжевых (линейных или квадратичных) конечных элементов не обеспечивает требуемой точности даже при чрезмерном сгущении сетки вблизи зон с резким изменением распределения давления. Поэтому в нашем случае, когда необходимо учитывать волновые составляющие нестационарных процессов, наиболее целесообразными являются кубические локальные базисные функции $\widehat{\varphi}_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $\widehat{\varphi}_2(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$, $\widehat{\varphi}_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $\widehat{\varphi}_4(\xi) = -\xi^2 + \xi^3$, тогда соответствующие локальные матрицы [1,2]

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 36/h_k & 3 & -36/h_k & 3 \\ 3 & 4h_k & -3 & -h_k \\ -36/h_k & -3 & 36/h_k & -3 \\ 3 & -h_k & -3 & 4h_k \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}^{(k)} & \mathbf{B}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{B}_{21}^{(k)} & \mathbf{B}_{22}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{11}^{(k)} = \begin{pmatrix} 36/h_1 & 3 \\ 3 & 4h_1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{12}^{(k)} = \begin{pmatrix} -36/h_1 & 3 \\ -3 & -h_1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{22}^{(k)} = \begin{pmatrix} 36/h_1 & -3 \\ -3 & 4h_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{21}^{(k)} = (\mathbf{B}_{12}^{(k)})^T = \begin{pmatrix} -36/h_1 & -3 \\ 3 & -h_1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_\gamma^{(k)} = \frac{\gamma}{420} \mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{C}_\sigma^{(k)} = \frac{\sigma}{420} \mathbf{C}^{(k)},$$

$$\mathbf{C}^{(k)} = \begin{pmatrix} 156h_k & 22h_k^2 & 54h_k & -13h_k^2 \\ 22h_k & 4h_k^3 & 13h_k^2 & -3h_k^2 \\ 54h_k & 13h_k^2 & 156h_k & -22h_k^2 \\ -13h_k^2 & -3h_k^2 & -22h_k^2 & 4h_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11}^{(k)} & \mathbf{C}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{C}_{21}^{(k)} & \mathbf{C}_{22}^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{11}^{(k)} = \begin{pmatrix} 156h_k & 22h_k^2 \\ 22h_k^2 & 4h_k^3 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_{12}^{(k)} = \begin{pmatrix} 54h_k & -13h_k^2 \\ 13h_k^2 & -3h_k^2 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_{22}^{(k)} = \begin{pmatrix} 156h_k & -22h_k^2 \\ -22h_k^2 & 4h_k^3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{21}^{(k)} = (\mathbf{C}_{12}^{(k)})^T = \begin{pmatrix} 54h_k & 13h_k^2 \\ -13h_k^2 & -3h_k^2 \end{pmatrix}.$$

Кубические базисные функции $\psi_i(x), i = \overline{1,4}$ на двух узловых (эрмитовых) конечных элементах $\Omega_k, k = \overline{1, N}$ имеют непрерывные производные $d\psi_i/dx, i = \overline{1,4}$ на всем участке Ω и порождают конечномерное пространство кусочно-кубических функций с непрерывной производной, являющейся подпространством гильбертова пространства, т.е. пространства функций, суммируемых вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Сборка глобальных матриц \mathbf{B} и \mathbf{C} производится путем ансамблирования, т.е. операции $\text{Ass}\{\cdot\}_{k=1, N}$, по соответствию локальной и глобальной нумераций базисных функций на каждом элементе. Необходимо отметить, что для лагранжевых конечных элементов

нумерация базисных функций совпадает с нумерацией узлов сетки. Для эрмитовых конечных элементов это не так, поскольку число базисных функций в два раза превышает число узлов на каждом элементе и на сетке в целом. Поэтому сборка глобальных матриц из локальных может осуществляться только по соответствию глобальной и локальной нумерации базисных функций. В результате получим

$$\mathbf{B} = \text{Ass} \left\{ \mathbf{B}^{(k)} \right\}_{k=1, \overline{N}} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_{k(k-1)} & \mathbf{B}_{kk} & \mathbf{B}_{k(k+1)} & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{B}_{N(N-1)} & \mathbf{B}_{NN} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \text{Ass} \left\{ \mathbf{C}^{(k)} \right\}_{k=1, \overline{N}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{k(k-1)} & \mathbf{C}_{kk} & \mathbf{C}_{k(k+1)} & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{N(N-1)} & \mathbf{C}_{NN} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{11}^{(1)}, \mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{12}^{(1)}, \mathbf{B}_{21} = (\mathbf{B}_{12}^{(1)})^T, \mathbf{B}_{22} = \mathbf{B}_{22}^{(1)} + \mathbf{B}_{11}^{(2)}, \mathbf{B}_{23} = \mathbf{B}_{12}^{(2)}, \dots,$$

$$\mathbf{B}_{kk} = \mathbf{B}_{22}^{(k-1)} + \mathbf{B}_{11}^{(k)}, \mathbf{B}_{k(k+1)} = \mathbf{B}_{12}^{(k)}, \mathbf{B}_{k(k-1)} = (\mathbf{B}_{k(k+1)}^T) = (\mathbf{B}_{12}^{(k)})^T = \mathbf{B}_{21}^{(k)}, \dots,$$

$$\mathbf{B}_{N(N-1)} = \mathbf{B}_{(N-1)N}^T = \mathbf{B}_{12}^{(N)}, \mathbf{B}_{NN} = \mathbf{B}_{11}^{(N)};$$

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{C}_{11}^{(1)}, \mathbf{C}_{12} = \mathbf{C}_{12}^{(1)}, \mathbf{C}_{21} = (\mathbf{C}_{12}^{(1)})^T, \mathbf{C}_{22} = \mathbf{C}_{22}^{(1)} + \mathbf{C}_{11}^{(2)}, \mathbf{C}_{23} = \mathbf{C}_{12}^{(2)}, \dots,$$

$$\mathbf{C}_{kk} = \mathbf{C}_{22}^{(k-1)} + \mathbf{C}_{11}^{(k)}, \mathbf{C}_{k(k+1)} = \mathbf{C}_{12}^{(k)}, \mathbf{C}_{k(k-1)} = (\mathbf{C}_{k(k+1)}^T) = (\mathbf{C}_{12}^{(k)})^T = \mathbf{C}_{21}^{(k)}, \dots,$$

$$\mathbf{C}_{N(N-1)} = \mathbf{C}_{(N-1)N}^T = \mathbf{C}_{12}^{(N)}, \mathbf{C}_{NN} = \mathbf{C}_{11}^{(N)}.$$

Неявная схема для решения начально-краевой задачи для уравнения (5) абсолютно устойчива при любом соотношении шагов по времени и пространственной координате.

Матрицы \mathbf{C}_γ и \mathbf{C}_σ для явной схемы (8) содержат ненулевые элементы не только на главной диагонали и на каждом временном слое векторы решения $\mathbf{P}^{(n+1)}$ не определяются явным образом вектором решения $\mathbf{P}^{(n)}$ из предыдущего слоя. Следовательно, явная схема представляется неэффективным, однако на практике существуют различные варианты замены \mathbf{C}_γ и \mathbf{C}_σ на диагональные матрицы \mathbf{C}'_γ и \mathbf{C}'_σ без значительного ущерба точности. В этом явная схема решения (8) становится вполне приемлемой, если для устойчивости

вычислительного процесса соблюдены определенные соотношения между шагами по времени и пространственной координате.

Многосеточное распараллеливание вычислений при вариационном методе моделирования

Множество сеточных точек при вариационной аппроксимации представляется как объединение множества узлов разбиения на конечные элементы, т.е. нулевой уровень грубости

$$\Omega(0,1) = \cup_{k=1}^{k=N} \Omega_k(0,1); \quad \Omega_k(0,1) = \{x_k : x_k \in \Omega, h_k = x_{k+1} - x_k, k = \overline{0, N}\};$$

Исходную сетку $\Omega(0,1)$ представим как объединение трех более грубых и не пересекающихся сеток первого уровня, т.е. $\Omega(0,1) = \cup_{\alpha=1}^{\alpha=3} \Omega(1,\alpha)$, $\Omega(1,\alpha) \cap \dots \cap \Omega(1,\beta) = \emptyset, \alpha \neq \beta$. Далее рекуррентным способом каждая из сеток $\Omega(1,\alpha), \alpha = \overline{1,3}$, рассматривается как исходная для сеток $\Omega(2,\alpha), \alpha = 1, \dots, 3^2$, а полученные девять еще более грубых сеток образуют второй уровень т.д. Построение грубых сеток заключается в удалении из каждой четверки последовательных узлов двух средних точек, как показано на рис. 2.

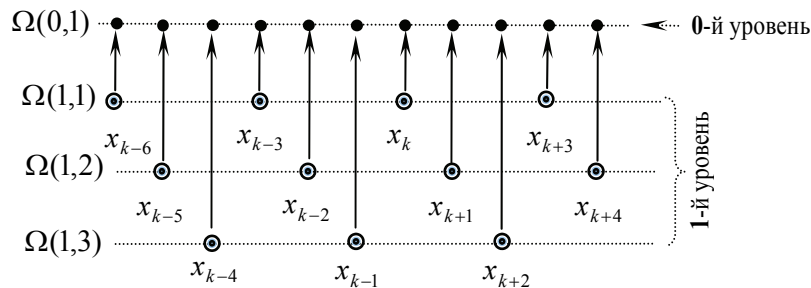


Рис. 2. Построения грубых (конечно-элементных) сеток.

Многосеточная схема иерархических вычислений может быть организована следующим образом. Исходные системы уравнений типа (8) или (9), соответствующие рассматриваемой ГТС или ЕСГ, заменой переменных $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}} + \mathbf{U}$, соответственно, преобразуются следующим образом

$$(8') \quad \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma \right) \mathbf{U}^{(n+1)} = - \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma - \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma \right) \mathbf{P}^{(n-1)} + \left(\frac{2}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma - \mathbf{B} \right) \mathbf{P}^{(n)} - \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma \right) \hat{\mathbf{P}}^{(n+1)},$$

$$(9') \quad \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma + \mathbf{B} \right) \mathbf{U}^{(n+1)} = \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma - \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma \right) \mathbf{P}^{(n-1)} - \frac{2}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma \mathbf{P}^{(n)} - \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma + \mathbf{B} \right) \hat{\mathbf{P}}^{(n+1)}$$

С учетом граничных условий типа (3), преобразованных аналогичным образом, системы (8') или (9') можно преобразовать и получить систему уравнений нулевого уровня

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{U}_0 = \mathbf{J}_0, \quad \mathbf{J}_0 = (J_1, \dots, J_N)^T, \quad \mathbf{U}_0 = (u_1, \dots, u_N)^T,$$

где матрица \mathbf{A}_0 имеет характерную блочно-стреловидную структуру, приведенную выше. Системы уравнений первого, второго и т.д. уровней строятся согласно схемам, представленным на рис. 5 и 6. Для трехуровневой многосеточной структуры уравнения соответствующие узлам сетки третьего уровня согласно схеме на рис. 2.

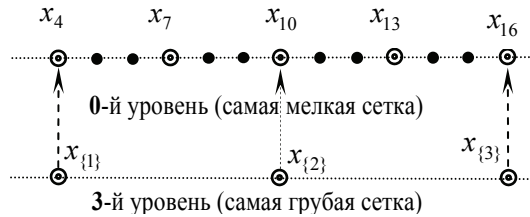


Рис. 3. Построение конечных элементов на грубых сетках.

В частности, интеграл $J_{\{2\}}^{L=3}$ в правой части уравнения, соответствующий конечным элементам $[x_{\{1\}}, x_{\{2\}}]$ и $[x_{\{2\}}, x_{\{3\}}]$ на грубой сетке третьего уровня, должен вычисляться, как сумма интегралов по двенадцати конечным элементам на самой мелкой сетке нулевого уровня. Поскольку конечные элементы $[x_{\{1\}}, x_{\{2\}}] \equiv [x_4, x_{10}] = [x_4, x_5] \cup [x_5, x_6] \cup \dots \cup [x_8, x_9] \cup [x_9, x_{10}]$ и $[x_{\{2\}}, x_{\{3\}}] \equiv [x_{10}, x_{16}] = [x_{10}, x_{11}] \cup [x_{11}, x_{12}] \cup \dots \cup [x_{14}, x_{15}] \cup [x_{15}, x_{16}]$. Строка матрицы \mathbf{A}_3 , соответствующая узлу $\{2\}$ и конечным элементам $[x_{\{1\}}, x_{\{2\}}]$ и $[x_{\{2\}}, x_{\{3\}}]$ вычисляется непосредственно на грубой сетке третьего уровня обычным способом. Аналогичным образом, могут быть построены системы уравнений для всех уровней, аналогичные (10), где соответствующие (8') и (9') глобальные матрицы

$$\mathbf{A}_L = \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma^L + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma^L \right) \text{ и } \mathbf{A}_L = \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{C}_\gamma^L + \frac{1}{2\tau} \mathbf{C}_\sigma^L + \mathbf{B}^L \right),$$

а матрицы $\mathbf{C}_\gamma^L, \mathbf{C}_\sigma^L, \mathbf{B}^L$ для эрмитовой конечно-элементной аппроксимации вычислены на грубой сетке уровня $L: 1 \leq L \leq L^+$.

Многосеточные итерации начинаются на уровне самых грубых сеток L^+ , а компоненты вектора \mathbf{U}_L , вычисленные на грубых сетках, добавляются к соответствующим компонентам вектора приближенного решения $\bar{\mathbf{P}}$, полученного на предыдущем шаге итерации. Если временем пересылки данных между основным процессором и процессорными модулями можно пренебречь, то асимптотические значения ускорения S_M и эффективности E_M определяются соотношениями аналогичными (17)

Для конкретных ГТС, пилообразная многосеточная схема вычислений с динамическим циклом используется для каждого уровня $1 < L \leq L^+$, начиная с самых грубых сеток на уровне L^+ , т.е. согласно рис. 2, если $L^+ = 5$. Другими словами, решаются соответствующие системы уравнений вида (16) для любой грубой сетки $\Omega(L,1)$, $\Omega(L,2)$ и $\Omega(L,3)$, если $1 < L \leq L^+$.

Таким образом, для каждого временного слоя вариационные модели ГТС в целом определяются решениями уравнений вида (16), а сам процесс вычислений состоит из $L^+ + 1$ уровней иерархии многосеточной схемы. На любом уровне многосеточной схемы для всех грубых сеток этого уровня иерархии процесс вычислений производится с использованием циклической схемы (15), согласно структуре разбиения матрицы \mathbf{A}_0 , т.е. $\mathbf{D}_R^i, i = \overline{1, m}$, \mathbf{D}_B и

$\mathbf{D}_B^i, i = \overline{1, m}$. Следовательно, каждый такой фрагмент внутренней процедуры вычислений, в свою очередь, состоит из трех уровней иерархии блочных итераций вида (9).

Эффективность многоуровневых вычислений при вариационных способах моделирования нестационарных потоков газа в сетях газопроводов любой сложности не обеспечивается сходимостью решений последовательности линейных систем уравнений по пространственным координатам при фиксированных значениях $\sigma = 2\lambda |q^{(n)}| / d, n = 1, 2, \dots$ на каждом временном слое, если воспользоваться алгоритмами регулярных возмущений (см. [3], Гл. 7, С. 300-315). В этом случае для вычисления поправок к достигнутому приближению на каждом временном слое решается система возмущенных уравнений.

Заключение

Основными достоинствами балансовых моделей распределения давления и потоков газа в сетях газопроводов произвольной конфигурации является их предельная простота и универсальность. Эти особенности в наибольшей степени проявляются при учете структурных особенностей сетей газопроводов любой сложности и соответствующих сеточных аппроксимаций распределения давления и потоков газа в них с точностью, практически определяемой погрешностью исходных данных. Простота и универсальность таких моделей проявляется также при учете влияния управляющих воздействий в промежуточных узлах, где расположены КС и другие объекты (источники, ПХГ, буферные и др. потребители) с регулируемыми подачами и отборами газа.

Использование внешних иерархических многосеточных итераций с пилообразным динамическим циклом на всех грубых сетках каждого уровня $L: 1 < L \leq L^+$ в сочетании циклическими внутренними итерациями (4) обеспечивает почти не улучшаемые показатели эффективности предлагаемых вычислительных методов моделирования.

Балансовые модели нестационарных режимов течения газа в сетях газопроводов произвольной конфигурации предоставляет возможность решения основных задач диспетчерского управления ГТС и ЕСГ в целом в наиболее общей и актуальной постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахметзянов А.В.* Нестационарные модели распределения потоков в сложных газотранспортных системах / Труды II Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО-04), Москва, 4-6 Октября, 2004 (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН). С.
2. *Hackbusch W.* Multi-Grid Methods and Applications. Springer-Berlin, 1985.
3. *Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П.* Методы решения задач математической физики. М.: Физматлит. 2002.