# НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСПЕТЧИРОВАНИЯ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.Э. Саак
*Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге*
Россия, 347928, Таганрог, Ростовская область, ГСП-17А, пер. Некрасовский, 44
E-mail: saak@tti.sfedu.ru

При моделировании диспетчирования многопроцессорной вычислительной системой (МВС) выделяют основные звенья взаимодействия сред потребления и предложения компьютерного сервиса - спрос, назначение, предложение. Приводится формализация указанных звеньев в качестве определѐнных по цели комбинаторных экспериментов. Соответствующим комбинаторным экспериментам сопоставляется пропускная способность к обслуживанию в качестве числовой характеристики взаимодействия среды спроса и среды предложения компьютерных услуг МВС, формализующей переполнение спроса относительно предложения вычислительного ресурса. Рациональные соотношения величин спроса и общего ресурса МВС существенны на этапе проектирования компьютерного обслуживания.

**A FEW NUMERICAL DISPATCHING CHARACTERISTICS OF MULTIPROCESSOR COMPUTER SYSTEMS** / A.E. Saak (Taganrog Institute of Technology - Southern Federal University, Taganrog, Russia). When modeling a dispatching process by a multiprocessor computer system (MCS) they mark out basic interactive sections of consumption and supply environments of computer service: the demand, destination and supply. It given the formalization of the sections mentioned as objectively specified combinatorial experiments. Those combinatorial experiments confront with the service capacity as a numerical characteristic of interaction of the demand environment and the supply environment of MCS computer services, which formalize the overflow of demand relative to the supply of a computer resource. Rational correlation between quantity demanded and the general resource of MCS is important on the stage of a computer service design.

## Введение

При рыночном виде сервиса под равновесным взаимодействием среды потребления и среды предложения товарной продукции понимается баланс спроса- предложения в ценовом измерении потребляемой продукции.

Компьютерный сервис мы относим к системным видам сервиса со сравнительно упорядоченным, устойчивым спросом со стороны изученного множества пользователей и установившимся, циклическим предложением со стороны диспетчирований вычислительными ресурсами системы обслуживания. В системном виде сервиса под равновесием, балансом взаимодействия среды спроса и среды предложения понимаем приемлемую вероятность обслуживания переполненного массива спроса по сравнению со стандартом ресурса предложения.

При этом величина переполнения многопроцессорной вычислительной системы (МВС) подчиняется априорным вероятностным ограничениям как результату изучения среды спроса со стороны системы предложения. Эти вероятностные ограничения выдвигаем в постулировании равноприоритетности по множеству пользователей и равнораспределённости по множеству заявок пользователей. Формализацией данных декларативных принципов выбираем модельность, каноничность спроса- предложения в моделях диспетчирования. Возникает базовая задача об усечённом кубе [1,2] и ряд других задач с классическими многогранниками, размерности, равной числу пользователей, имеющих столь же опорный, базовый характер. Соответствующим комбинаторным экспериментам [3-5] сопоставляется пропускная способность к обслуживанию в качестве числовой характеристики упомянутого взаимодействия среды спроса и среды предложения компьютерных услуг МВС. Окончательно, постановка вопроса об анализе переполнения спроса относительно предложения вычислительного ресурса сводится к определению и вычислению пропускных способностей предыдущих базовых комбинаторных моделей диспетчирования каноническим компьютерным обслуживанием.

### Эксперимент спроса- назначения

Индивидуальная заявка пользователя формализуется ресурсным элементом единичного спроса, принимаемым в форме однородной двоичной случайности по закону 0; 1. Множество «*k*» единичных ресурсных элементов синтезируется в линейный полигон $[0,k]\subset Z^1$ и называется модельным спросом. Канонический линейный полигон $[0,k]\subset Z^1$ ресурсных предложений со стороны диспетчирований принимаем в качестве условия полноты (каноничности) эксперимента модельного спроса- предложения. Соответственно, в усечённом эксперименте модельного спроса- предложения ресурсные предложения представляются линейным полигоном $[0,L]\subset Z^1,\ L<k$. Диспетчирование понимаем как отклик на индивидуальную заявку пользователя.

Совокупность «*k*» законов 0; 1 подвергаем параллельному синтезу. Для эксперимента спроса- назначения получаем каноническое соотношение усечения в виде

$$\sum_{j_1=0}^{L-1} C_k^{(j_1)} + \sum_{j_1=L+1}^{k} C_k^{(j_1)} = 2^k - C_k^{(L)}$$

Первую сумму принимаем в качестве начальной, вторую- в качестве инверсной частей усечения модельного спроса- назначения ресурсных элементов. Отношение

$$\frac{\sum_{j_1=0}^{L-1} C_k^{(j_1)}}{2^k - C_k^{(L)}} \qquad (1)$$

выбираем числовой характеристикой явления переполнения спроса над имеющимся ресурсом.

Производящий бином единичного сдвига

$$(S_1 \pm 1)^k$$

определяет модельный параллельный синтез кругового типа при выборе знака (+) и гиперболический синтез единичных диодов- при выборе знака (–) перед нейтральным слагаемым. В области распределений получаем модель ординарных кубических граней

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^{(j)} = 0$$

в качестве косуммы мощностей ординарного базиса эксперимента

$$\left\{C_k^{(k-1)}\right\}_1^k .$$

Последняя приводит к полному усечению вида

$$\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j C_k^{(j)} + \sum_{j=L+1}^{k} (-1)^j C_k^{(j)} = -(-1)^L C_k^{(L)} .$$

Согласно классическому комбинаторному тождеству [6,7] имеем

$$\sum_{j=0}^{L-1}(-1)^j C_k^{(j)} = (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)},$$

$$\sum_{j=L+1}^{k}(-1)^j C_k^{(j)} = (-1)^k \sum_{j=L+1}^{k}(-1)^{k-j} C_k^{(k-j)} =$$

$$= (-1)^k \sum_{j=0}^{k-L-1}(-1)^j C_k^{(j)} = (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(k-L-1)} = (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L)}.$$

В итоге, тождество усечения превращается в правило понижения биномиального основания

$$C_k^{(L)} = C_{k-1}^{(L-1)} + C_{k-1}^{(L)}.$$

В случае гиперболической композиции модельных диодов относительная мощность начальной и инверсной частей полного усечения равна величинам

$$\frac{C_{k-1}^{(L-1)}}{C_k^{(L)}} = \frac{L}{k},\ \frac{C_{k-1}^{(L)}}{C_k^{(L)}} = 1 - \frac{L}{k}. \qquad (2)$$

Перейдём к вопросу полного определения усечённой композиции модельных элементов. С этой целью, сведём кратную степень бинома к мультипликативному синтезу

$$(S_1+1)^k = 1 + \left[(S_1+1)^k - 1\right] = 1 + S_1 \sum_{j=0}^{k-1}(S_1+1)^j = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} S_1 (S_1+1)^j .$$

Таким образом, для полного биномиального производящего $Z$- интеграла получено тейлоровское разложение

$$\sum_{j=0}^{k} C_k^{(j)} S_1^j = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} S_1 (S_1+1)^j$$

по составным биномам относительно единичного сдвига. Постулируем аналогичное тейлоровское представление для неполного биномиального производящего символа

$$\sum_{j=0}^{L-1} C_k^{(j)} S_1^j = S(k,L).$$

Вычислим коэффициенты разложения $Z$- интегрированием по частям. Имеем

$$S(k,L) = 1 + \sum_{j=1}^{L\text{-}1}\left[C_{k-1}^{(j)} S_1^j + C_{k-1}^{(j-1)} S_1^j\right] = 1 + \sum_{j=1}^{L\text{-}1}\left[C_{k-1}^{(j)} S_1^j - C_{k-1}^{(j-1)} S_1^{j-1}\right] +$$

$$+ (S_1+1)\sum_{j=1}^{L\text{-}1} C_{k-1}^{(j-1)} S_1^{j-1} = C_{k-1}^{(L-1)} S_1^{L-1} + (S_1+1)\sum_{j=0}^{L\text{-}2} C_{k-1}^{(j)} S_1^j =$$

$$= C_{k-1}^{(L-1)} S_1^{L-1} + (S_1+1)\, S(k-1, L-1).$$

Циклическое повторение найденного преобразования приведёт к искомой формуле

$$S(k,L) = C_{k-1}^{(L-1)} S_1^{L-1} + (S_1+1)\, S(k-1, L-1) =$$

$$= C_{k-1}^{(L-1)} S_1^{L-1} + C_{k-2}^{(L-2)} S_1^{L-2}(S_1+1) + \ldots + (S_1+1)^{L-1},$$

или

$$\sum_{j=0}^{L-1} C_k^{(j)} S_1^j = \sum_{j=0}^{L-1} C_{k-1-j}^{(L-1-j)} S_1^{L-1-j} \left(S_1+1\right)^j .$$

Данная формула определяет отсчёты усечённой модельной биномиальной композиции кругового типа:

$$\sum_{j=0}^{L-1} C_k^{(j)} = \sum_{j=0}^{L-1} C_{k-1-j}^{(L-1-j)} 2^j .$$

Композиция с гиперболической первообразной претерпевает аналогичное усечение

$$\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j C_k^{(j)} S_1^j = \sum_{j=0}^{L-1} (-1)^{L-1-j} C_{k-1-j}^{(L-1-j)} S_1^{L-1-j} \left(1-S_1\right)^j$$

в производящей форме и

$$\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j C_k^{(j)} = (-1)^{L-1} C_{k-1}^{(L-1)}$$

- в модельной форме в области распределений.

## Эксперимент спроса- предложения

Для эксперимента спроса- предложения получаем каноническое соотношение усечения в виде

$$\sum_{j_1=0}^{L-1} (-1)^{j_1} C_k^{(j_1)} \frac{\left(L-j_1\right)^k}{k!} + \sum_{j_1=L+1}^{k} (-1)^{j_1} C_k^{(j_1)} \frac{\left(L-j_1\right)^k}{k!} = 1. \tag{3}$$

Единичная величина справа следует из классического комбинаторного тождества Теппера [6,7]

$$\sum_{j_1=0}^{k} (-1)^{j_1} C_k^{(j_1)} \frac{\left(L-j_1\right)^k}{k!} = 1$$

Формуле (3) сопоставляем отношение первой суммы к величине правой части

$$\sum_{j_1=0}^{L-1} (-1)^{j_1} C_k^{(j_1)} \frac{\left(L-j_1\right)^k}{k!} . \tag{4}$$

Найденная величина объёма усечённого модельного куба [1,2] содержит пропускную способность эксперимента спроса- предложения модельных ресурсов (рис.1).

Заметим, что пропускная способность полного (канонического) эксперимента спроса-предложения модельных ресурсов (рис.2) даётся формулой

$$\sum_{j_1=0}^{k} (-1)^{j_1} C_k^{(j_1)} \frac{\left(k-j_1\right)^k}{k!} = 1.$$

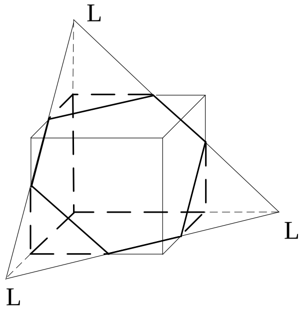


Рис.1. Усеченный эксперимент спроса-предложения

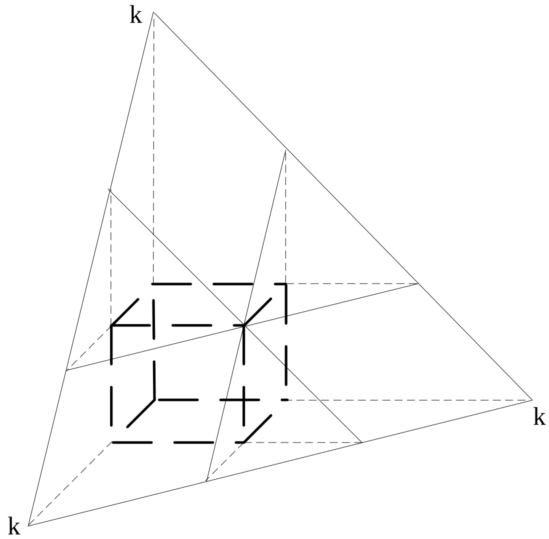


Рис.2. Эксперимент канонического спроса-предложения

Численные расчёты по формулам (1), (2), (4) приведены в таблице.

| $(k,L)$ | $\dfrac{\sum_{j=0}^{L-1} C_k^{(j)}}{2^k - C_k^{(L)}}$ | $\dfrac{L}{k}$ | $\sum_{j=0}^{L-1} (-1)^j C_k^{(j)} \dfrac{(L-j)^k}{k!}$ |
|---|---|---|---|
| k=10, L=1 | 9.862E-4 | 0.1 | 2.756E-7 |
| k=10, L=2 | 0.011 | 0.2 | 2.794E-4 |
| k=10, L=3 | 0.062 | 0.3 | 0.013 |
| k=10, L=4 | 0.216 | 0.4 | 0.139 |
| k=10, L=5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| k=10, L=6 | 0.784 | 0.6 | 0.861 |
| k=10, L=7 | 0.938 | 0.7 | 0.987 |
| k=10, L=8 | 0.989 | 0.8 | 1 |
| k=10, L=9 | 0.999 | 0.9 | 1 |
| k=10, L=10 | 1 | 1 | 1 |
| | | | |
| k=15, L=1 | 3.053E-5 | 0.067 | 7.647E-13 |
| k=15, L=2 | 4.899E-4 | 0.133 | 2.505E-8 |
| k=15, L=3 | 3.745E-3 | 0.2 | 1.06E-5 |
| k=15, L=4 | 0.018 | 0.267 | 6.591E-4 |
| k=15, L=5 | 0.065 | 0.333 | 0.012 |
| k=15, L=6 | 0.178 | 0.4 | 0.091 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| k=15, L=7 | 0.378 | 0.467 | 0.329 |
| k=15, L=8 | 0.622 | 0.533 | 0.671 |
| k=15, L=9 | 0.822 | 0.6 | 0.909 |
| k=15, L=10 | 0.935 | 0.667 | 0.988 |
| k=15, L=11 | 0.982 | 0.733 | 0.999 |
| k=15, L=12 | 0.996 | 0.8 | 1 |
| k=15, L=13 | 1 | 0.867 | 1 |
| k=15, L=14 | 1 | 0.933 | 1 |
| k=15, L=15 | 1 | 1 | 1 |
| | | | |
| k=20, L=1 | 9.537E-7 | 0.05 | 0 |
| k=20, L=2 | 2.003E-5 | 0.1 | 4.31E-13 |
| k=20, L=3 | 2.014E-4 | 0.15 | 1.425E-9 |
| k=20, L=4 | 1.294E-3 | 0.2 | 4.234E-7 |
| k=20, L=5 | 5.998E-3 | 0.25 | 3.043E-5 |
| k=20, L=6 | 0.021 | 0.3 | 8.031E-4 |
| k=20, L=7 | 0.062 | 0.35 | 9.681E-3 |
| k=20, L=8 | 0.15 | 0.4 | 0.061 |
| k=20, L=9 | 0.3 | 0.45 | 0.221 |
| k=20, L=10 | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| k=20, L=11 | 0.7 | 0.55 | 0.779 |
| k=20, L=12 | 0.85 | 0.6 | 0.939 |
| k=20, L=13 | 0.938 | 0.65 | 0.99 |
| k=20, L=14 | 0.979 | 0.7 | 0.999 |
| k=20, L=15 | 0.994 | 0.75 | 1 |
| k=20, L=16 | 0.999 | 0.8 | 1 |
| k=20, L=17 | 1 | 0.85 | 1 |
| k=20, L=18 | 1 | 0.9 | 1 |
| k=20, L=19 | 1 | 0.95 | 1 |
| k=20, L=20 | 1 | 1 | 1 |

Наиболее важной из приведённых метрических числовых характеристик явления переполнения спроса над предложением вычислительных ресурсов является пропускная способность эксперимента спроса- предложения (4).

## Заключение

В статье предложены формальные модели диспетчирования множеством вычислительных ресурсов компьютерного обслуживания в условиях переполнения массива спроса по отношению к величине общего ресурса системы. Построены числовые характеристики явления переполнения. Данные определения и вычисления основаны на аппарате комбинаторики системного сервиса, который также изучается в предлагаемой работе. В случае модельных, единичных требований на ресурсы установлены метрические величины усечения комбинаторных экспериментов спроса- предложения, спроса- назначения позволяющие анализировать упомянутое явление переполнения и, на данной основе, строить адекватные алгоритмы диспетчирования МВС. Рациональные соотношения величин спроса и общего ресурса МВС существенны на этапе проектирования компьютерного обслуживания.

## Список литературы


1. *Макаревич О.Б., Саак Э.М., Чефранов А.Г.* Анализ загруженности однородных микропроцессорных вычислительных систем коллективного пользования // Автоматика и вычислительная техника, 1980, №4, с. 32-36.
2. *Макаревич О.Б., Саак Э.М., Чефранов А.Г.* Об одной модели функционирования однородной вычислительной системы в режиме пакетной обработки сложных задач // Электронное моделирование, 1980, №5, с. 22-27.
3. *Саак А.Э.* Комбинаторный эксперимент как модель многопроцессорных вычислительных систем коллективного пользования // Труды II Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО’ 2004. М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2004. с.871-883.
4. *Саак А.Э.* Алгебро- метрологические свойства комбинаторных моделей МВС // Труды III Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО’ 2006. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2006. с. 1452 - 1457.
5. *Саак А.Э.* Канонические модели многопроцессорных вычислительных систем // Труды IV Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО’ 2008. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2008. с. 1356 - 1384.
6. Егорычев Г.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. - Новосибирск: Наука, 1977.- 285с.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т.1.- М.: Мир, 1984.- 528с.